QR – Issue

QR – Article

SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal

Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2019 **Issue:** 01 **Volume:** 69

Published: 10.01.2019 http://T-Science.org

Gennady Evgenievich Markelov
Candidate of Engineering Sciences, associate professor,
corresponding member of International
Academy of Theoretical and Applied Sciences,
Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, Russia
markelov@bmstu.ru

SECTION 2. Applied mathematics. Mathematical modeling.

A WORKING MATHEMATICAL MODEL OF A TECHNICAL SYSTEM ELEMENT

Abstract: *A working mathematical model of a technical system element was obtained. The technical system element includes a resistor with temperature-dependent resistance and total heat capacity. The created model is sufficiently full, accurate, adequate, productive, and economical. Such a mathematical model, when applied, requires less time and costs spent on research and enables efficient use of mathematical modeling tools.*

Key words: *working mathematical model, properties of mathematical models, principles of mathematical modeling.*

Language: *Russian*

Citation: Markelov, G. E. (2018). A working mathematical model of a technical system element. *ISJ Theoretical & Applied Science, 01 (69),* 52-55.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-01-69-11 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS

РАБОЧАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕМЕНТА ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Аннотация: *Получена рабочая математическая модель элемента технической системы. Элемент технической системы включает резистор, сопротивление и полная теплоемкость которого зависят от температуры. Построенная модель в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности. Применение такой математической модели приводит к сокращению затрат времени и средств на проведение исследования, позволяет рационально использовать возможности математического моделирования.*

Ключевые слова: *рабочая математическая модель, свойства математических моделей, принципы математического моделирования.*

1. Введение

Подходы к построению математических моделей различных технических систем изложены в обширной учебной и научной литературе. В работах [1; 2] введено понятие рабочей математической модели и изложен единый подход к построению математической модели, которая в достаточной мере обладает нужными свойствами применительно к конкретному исследованию. Некоторые свойства математических моделей приведены в работах [3; 4]. В работе [5] рассмотрен пример построения математической модели, в достаточной мере обладающей нужными свойствами применительно к исследованию, некоторые результаты которого изложены в работах [6–8]. Особенности внедрения единого подхода к построению математических моделей рассмотрены в работах [9; 10].

Целью настоящей работы является разработка в рамках единого подхода рабочей математической модели одного из элементов технической системы. Такой элемент включает резистор, сопротивление и полная теплоемкость которого зависят от температуры.

2. Постановка задачи

Резистор считаем высокотеплопроводным телом, температура T которого в начальный момент времени t_0 равна T_0. На поверхности резистора площадью S происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой равна T_0, коэффициент теплоотдачи известен и равен α. Пусть

$$R(T)=R_0\left[1+\beta(T-T_0)\right],$$

$$C(T)=C_0\left[1+\gamma(T-T_0)\right],$$

где $R(T)$ и $C(T)$ — сопротивление и полная теплоемкость резистора; R_0 и C_0 — сопротивление и полная теплоемкость резистора при $T=T_0$; β и γ — температурные коэффициенты, причем $\beta>0$ и $\gamma>0$. Через резистор протекает электрический ток, сила которого равна

$$I=\frac{U}{R_0\left[1+\beta(T-T_0)\right]}, \qquad (1)$$

где U — постоянная разность электрических потенциалов на полюсах рассматриваемого элемента.

В рамках проводимого исследования представляет интерес величина I. Построим рабочую математическую модель объекта исследования, которая в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности.

3. Решение задачи

Для решения поставленной задачи выстроим иерархию математических моделей данного объекта исследования и определим условия, при выполнении которых можно с относительной погрешностью не более заданного значения δ_0 найти искомую величину I.

Если разность $T-T_0$ достаточно мала, то согласно (1) найдем искомую величину по формуле

$$I_0=U/R_0. \qquad (2)$$

Определим условия, при которых применима полученная формула. Для этого рассмотрим установившийся процесс теплообмена. В этом случае мощность тепловыделения в материале резистора равна тепловому потоку, отводимому от резистора, т. е.

$$\frac{U^2}{R_0\left[1+\beta(T_*-T_0)\right]}=\alpha(T_*-T_0)S,$$

где T_* — установившееся значение температуры резистора. Из полученного равенства легко найти

$$T_*=T_0+\frac{1}{2\beta}\left(-1+\sqrt{1+\frac{4\beta U^2}{\alpha S R_0}}\right),$$

а затем определить установившееся значение

$$I_*=\frac{U}{R(T_*)}=\frac{2I_0}{1+\sqrt{1+4\beta U I_0/(\alpha S)}}. \qquad (3)$$

Очевидно, что $I_*\le I\le I_0$. Тогда для относительной погрешности величины I_0 запишем

$$\delta(I_0)=\left|\frac{I-I_0}{I}\right|=\frac{I_0}{I}-1\le\frac{I_0}{I_*}-1.$$

Следовательно, при выполнении условия

$$\frac{I_0}{I_*}-1\le\delta_0$$

можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (2) для нахождения искомой величины. Тогда приходим к неравенству

$$\frac{\beta U I_0}{\alpha S}\le(\delta_0+1)\delta_0. \qquad (4)$$

При выполнении этого неравенства математическая модель (2) в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности.

Определим условия, при которых применима математическая модель (3). Для этого рассмотрим неустановившийся процесс теплообмена. В этом случае изменение температуры резистора во времени t описывает обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$C(T)\frac{dT}{dt}=\frac{U^2}{R(T)}-\alpha(T-T_0)S,$$

а начальное условие имеет вид

$$T(t_0)=T_0.$$

Учитывая, что

$$I=\frac{I_0}{1+\beta(T-T_0)},$$

сформулируем задачу Коши

$$\frac{dI}{dt}=\frac{\beta I^2}{C_0 I_0}\,\frac{\alpha S(I_0-I)-\beta U I^2}{\gamma(I_0-I)+\beta I}, \qquad (5)$$

$$I(t_0)=I_0.$$

При выполнении условия

$$\delta(I_*)=\left|\frac{I-I_*}{I}\right|=1-\frac{I_*}{I}\le\delta_0$$

можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (3) для нахождения искомой величины, причем

$$\delta_0<\frac{I_0}{I_*}-1,$$

так как в противном случае следует применять формулу (2). Затем найдем момент времени

$$t_*=t_0+\frac{C_0}{\alpha S}\left[\frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{I_*}{I_0}-1+\delta_0\right)\frac{I_0}{I_*}+\left(\frac{I_0}{2I_0-I_*}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\gamma}{\beta}\,\frac{I_0-I_*}{2I_0-I_*}\,\frac{I_0}{I_*}-1\right)\ln\left(2-\frac{I_*}{I_0}-\delta_0\right)-$$

$$-\left(\frac{I_0}{2I_0-I_*}+\frac{\gamma}{\beta}\frac{I_0-I_*}{2I_0-I_*}\frac{I_0}{I_*}\right)\ln\left(\frac{I_0}{I_0-I_*}\delta_0\right)\Bigg],$$

для которого $I(t_*)=I_*/(1-\delta_0)$. Тогда согласно (5) установившееся значение I_* можно с относительной погрешностью не более δ_0 считать равным $I(t)$ при $t\geq t_*$.

Если не выполнено условие (4), то математическая модель (3) при $t\geq t_*$ в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности.

Разработка новой математической модели при формировании иерархии математических моделей объекта исследования может привести к уточнению найденных ранее условий применимости построенных математических моделей. Действительно, используя математическую модель (5), можно уточнить условие применимости формулы (2). Для этого найдем момент времени

$$t^*=t_0+\frac{C_0}{\alpha S}\Bigg[\left(\frac{I_0}{2I_0-I_*}+\right.$$

$$\left.+\frac{\gamma}{\beta}\frac{I_0-I_*}{2I_0-I_*}\frac{I_0}{I_*}-1\right)\ln\left(1+\frac{I_*}{I_0}\delta_0\right)-\frac{\gamma}{\beta}\delta_0-$$

$$-\left(\frac{I_0}{2I_0-I_*}+\frac{\gamma}{\beta}\frac{I_0-I_*}{2I_0-I_*}\frac{I_0}{I_*}\right)\ln\left(1-\frac{I_*}{I_0-I_*}\delta_0\right)\Bigg],$$

для которого $I(t^*)=I_0/(1+\delta_0)$. Тогда значение I_0 можно с относительной погрешностью не более δ_0 считать равным $I(t)$ при $t\leq t^*$.

Если выполнено условие (4) или $t\leq t^*$, то математическая модель (2) в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности.

4. Результаты

Построение иерархии математических моделей позволяет выявить рабочую математическую модель, которая в достаточной мере обладает нужными свойствами применительно к конкретному исследованию. Действительно, если выполняется неравенство (4) или в рамках проводимого исследования $t\leq t^*$, то математическую модель (2) считаем рабочей. Если не выполнено условие (4), а временной интервал от t_0 до t_* можно в рамках проводимого исследования не рассматривать, то выбираем математическую модель (3) как рабочую, иначе — математическую модель (5).

5. Заключение

Таким образом, в рамках единого подхода сформулированы утверждения, которые позволяют установить рабочую математическую модель элемента технической системы. Построенная математическая модель в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности применительно к данному исследованию.

Очевидно, что применение такой модели приводит к сокращению затрат времени и средств на проведение исследования, позволяет рационально использовать возможности математического моделирования.

References:

1. Markelov, G. E. (2015). On Approach to Constructing a Working Mathematical Model. *ISJ Theoretical & Applied Science, 04 (24):* 287–290. Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS*04(24)52 Doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.04.24.52
2. Markelov, G. E. (2015). Constructing a Working Mathematical Model. *ISJ Theoretical & Applied Science, 08 (28): 44–46.* Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-08-28-6 Doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.08.28.6
3. Myshkis, A. D. (2011). *Elements of the Theory of Mathematical Models* [in Russian]. Moscow: URSS.
4. Zarubin, V. S. (2010). *Mathematical Modeling in Engineering* [in Russian]. Moscow: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana.
5. Markelov, G. E. (2012). Peculiarities of Construction of Mathematical Models. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii, No. 4,* http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/150.html
6. Markelov, G. E. (2000). Effect of initial heating of the jet-forming layer of shaped-charge liners on the ultimate elongation of jet elements. *J. Appl. Mech. and Tech. Phys., 41, No. 2,* 231-234.

7. Markelov, G. E. (2000). Effect of initial heating of shaped charge liners on shaped charge penetration. *J. Appl. Mech. and Tech. Phys., 41, No. 5,* 788–791.
8. Markelov, G. E. (2000). *Influence of heating temperature on the ultimate elongation of shaped-charge jet elements.* Proc. of the 5th Int. Conf. “Lavrentyev Readings on Mathematics, Mechanics and Physics”. (p.170). Novosibirsk: Lavrentyev Institute of Hydrodynamics.
9. Markelov, G. E. (2015). Particular Aspects of Teaching the Fundamentals of Mathematical Modeling. *ISJ Theoretical & Applied Science, 05 (25),* 69–72. Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS 05(25)14 Doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.05.25.14
10. Markelov GE (2016) Teaching the Basics of Mathematical Modeling. Part 2. *ISJ Theoretical & Applied Science, 01 (33),* 72–74. Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-01-33-15 Doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2016.01.33.15