Impact Factor:

ISRA (India)	= **3.117**	**SIS** (USA)	= **0.912**	**ICV** (Poland)	= **6.630**
ISI (Dubai, UAE)	= **0.829**	**РИНЦ** (Russia)	= **0.156**	**PIF** (India)	= **1.940**
GIF (Australia)	= **0.564**	**ESJI** (KZ)	= **8.716**	**IBI** (India)	= **4.260**
JIF	= **1.500**	**SJIF** (Morocco)	= **5.667**	**OAJI** (USA)	= **0.350**

QR – Issue QR – Article

SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal

Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2019 **Issue:** 05 **Volume:** 73

Published: 01.05.2019 http://T-Science.org

SECTION 1. Theoretical research in mathematics

Ablakul Abdirashidov
Corresponding member of International Academy, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Docent to department of theoretical and applied mechanics, Samarkand State University, Uzbekistan
abdira@mail.ru

Abdusattor Babayarov
Candidate of Technical Sciences, Docent to Department of Mathematical modeling and complex programming, Samarkand State University, Uzbekistan

Bahrom Aminov
Assistant to department of mathematical modeling and complex programming, Samarkand State University, Uzbekistan

Akmaljon Abdurashidov
Researcher Samarkand State University, Uzbekistan,

APPLICATION THE VARIATIONAL ITERATION METHOD AND HOMOTOPY PERTURBATION METHOD FOR THE APPROXIMATE SOLUTION OF INTEGRAL EQUATIONS VOLTAIRE

Abstract: *The purpose of this operation is to apply a method of variational iterations and homotopy perturbation method to the solution of the linear and nonlinear integral equations of Voltaire, and also to confirm reliability of this method in processing of scientific problems. In this operation the variational iterations method and homotopy perturbation method is used to approximate solution typical the linear and nonlinear integral equations of Voltaire of a different order and different type. Results of this method meets quicker to the exact decision for some linear and nonlinear problems. Variational iterations method and homotopy perturbation method very effective and idle time.*

Key words: *integral equations, variational iterations method, homotopy perturbation method, initial approach, approximate solution.*

Language: *Russian*

Citation: Abdirashidov, A., Babayarov, A., Aminov, B., & Abdurashidov, A. (2019). Application the variational iteration method and homotopy perturbation method for the approximate solution of integral equations Voltaire. *ISJ Theoretical & Applied Science, 05 (73)*, 6-10.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-05-73-2 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВАРИАЦИОННЫХ ИТЕРАЦИЙ И ГОМОТОПИЧЕСКОГО МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

Аннотация: *Целью данной работы является применить метода вариационных итераций и гомотопического метода малого параметра к решению линейных и нелинейных интегральных уравнений*

Вольтерра, а также подтвердить надежность данного метода в обработке научных проблем. В этой работе метод вариационных итераций и гомотопический метод малого параметра использован к приближенному решению типичных линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра разного порядка и разного типа. Результаты этих методов сходятся быстрее к точному решению для некоторых нелинейных проблем. Метод вариационных итераций и гомотопический метод малого параметра очень эффективные и простой.

Ключевые слова: *интегральные уравнения, метод вариационных итераций, гомотопического метода малого параметра, начальное приближение, приближенное решение.*

Введение.

Последние годы часто обращают внимание ученые и инженеры к нелинейным явлениям, которые появляются во многих приложениях научной сферы, таких как гидроаэродинамика, физика твердого тела, физика плазмы, математическая биология и химическая кинетика, могут быть смоделированы уравнениями частных производных и интегральными уравнениями линейного и нелинейного вида. Обзор литератур последних лет, показывает, что для решения таких задач разработаны многочисленные аналитические, приближенные и численные методы. Новые приближенные методы, например, гомотопический метод малого параметра (ГММП, homotopy perturbation method (HPM)), метод разложения Адомиана, метод вариационных итераций (МВИ, variational iteration method (VIM)), метода декомпозиции, представленного J.H.He [4, 6-9], A.M.Wazwaz [12, 13], применены ко многим приложений прикладных наук [1-10, 12,13]. Новый ГММП был предложен J.H.He в 1997 и систематически описан в 2000, которое, на самом деле, связывается традиционного метода возмущения и гомотопии в топологии [6, 8]. ГММП самые эффективные и удобные и для слабо и для строго нелинейные уравнения [10, 13]. МВИ является мощным методом для решения различных видов уравнений, линейных или нелинейных [4, 7, 9, 13]. В данной работе эти две методы применены для приближенного решения интегральных уравнений Вольтерра.

Постановка задачи. Общая форма этого интегрального уравнения имеет вид $L[y(x)]+N[y(x)]=g(x),$ где L – линейный оператор; N – нелинейных оператор; $g(x)$ – известная, а $y(x)$ – неизвестная функция. Требуется решить следующую нелинейную интегральную уравнению (ИУ) Вольтерра

$$y(x)=f(x)+\int_0^x K(x,t)F(y(t))dt \qquad (1)$$

МВИ и ГММП, где $y(x)$ – искомая функция; $f(x)$, $F(y(x))$ – известные функции; $K(x,t)$ – ядро интегрального уравнения (1) [11, 12].

Алгоритм метода вариационных итераций.

Итерационная формула для приближенного решения уравнения (1) МВИ имеет вид [7, 9]:

$$y_{n+1}(x)=y_n(x)+\int_0^x \lambda(s)\big(L[y_n(s)]+ + N[\tilde{y}_n(s)]-g(s)\big)ds,\ n=0,1,2,.... \qquad (2)$$

где λ – множитель Лагранжа, который может быть определен оптимально с помощью вариационной теории (в расчетах МВИ равна $\lambda=-1$).

Начальное приближение выбираем так

$$y_0(x)=y(0)+xy'(0)+\frac{x^2}{2!}y''(0)+...$$

Точное решение уравнения (1) находим так $y(x)=\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$.

Алгоритм гомотопического метода малого параметра.

По идею метода уравнение (1) перепишем в виде [8]:

$$R(x)=y(x)-f(x)-\int_0^x K(x,t)\big[L(y(t))+N(y(t))\big]dt=0.$$

Введем $H(y,p)=(1-p)F(y)+pL(y)$ новую функцию, которые верны следующие равенства: $H(y,0)=F(y)$; $H(y,1)=L(y)$. Найдем такое значение $p\in[0,1]$, чтобы выполнялось тождество $L(y)=0$.

Тогда мы имеем точное решение (1) вида

$$y(x)=\lim_{p\to1}y(x)=\lim_{p\to1}(y_0(x)+py_1(x)+p^2y_2(x)+...)=$$
$$=y_0(x)+y_1(x)+y_2(x)+...$$

Далее решены несколько примеры, посвященные к решению (1), методом вариационных итераций и гомотопическим методом малого параметра [4, 6-10, 13].

Пример 1.

Требуется решить следующую ИУ Вольтерра МВИ и ГММП:

$$y(x)=x-\int_0^x \sinh(x-t)y(t)dt.$$

1) *МВИ.* Сначала дифференцируем это уравнение по x и имеем следующую интегро-дифференциальную уравнению вида:

$$y'(x)=1-\int_0^x \cosh(x-t)y(t)dt.$$

Используя формулу (2) запишем следующую итерационную формулу:

$$y_{n+1}(x)=y_n(x)-\int_0^x\left(y_n'(s)-1+\int_0^s \cosh(s-r)y_n(r)dr\right)ds$$

Начальное приближение $y_0=y(0)=1$. Дальнейшие приближения равны:

$$y_1(x)=y_0(x)-\int_0^x\left(y_0'(s)-1+\int_0^s \cosh(s-r)y_0(r)dr\right)ds=x;$$

$$y_2(x)=2x-\sinh x\approx x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}+...;$$

$$y_3(x)=3x-\frac{5}{2}\sinh x+\frac{x}{2}\cosh x\approx x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^7}{5040}+...;$$

$$y_4(x)=4x-\frac{35}{8}\sinh x+\frac{11x}{8}\cosh x-\frac{x^2}{8}\sinh x\approx$$

$$\approx x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^9}{362880}+...;$$

$$y_5(x)\approx x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^{11}}{39916800}...;\ ...;$$

$$y_n(x)\approx x-\frac{x^3}{6}+....$$

Отсюда $y(x)=\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)=x-\dfrac{x^3}{6}$.

2) *ГММП.* Введем следующие обозначения вида:

$$F(y)=y(x)-x;$$

$$L(y)=y(x)-x+\int_0^x \sinh(x-t)y(t)dt.$$

Тогда имеем следующие приближения:

$$p^0:\ y_0(x)=x;$$

$$p^1:\ y_1(x)=-\int_0^x \sinh(x-t)y_0(t)dt=x-\sinh x\approx$$

$$\approx -\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+...;$$

$$p^2:\ y_2(x)=-\int_0^x \sinh(x-t)y_1(t)dt=x-\frac{3}{2}\sinh x+\frac{1}{2}\cosh x\approx$$

$$\approx \frac{1}{120}x^5+\frac{1}{2520}x^7+\frac{1}{120960}x^9+...;$$

$$p^3:\ y_3(x)=-\int_0^x \sinh(x-t)y_2(t)dt=x-\frac{15}{8}\sinh x+$$

$$+\frac{7}{8}x\cosh x-\frac{1}{8}x^2\sinh x\approx\frac{x^7}{5040}-\frac{x^9}{120960}+...$$

$$p^4:\ y_4(x)=-\int_0^x \sinh(x-t)y_3(t)dt=x-\frac{35}{16}\sinh x+$$

$$\frac{19x}{16}\cosh x-\frac{x^2}{4}\sinh x+\frac{x^3}{48}\cosh x\approx\frac{x^9}{362880}+...$$

Точное решение задачи:

$$y(x)=\lim_{p\to 1} y(x)=y_0(x)+y_1(x)+y_2(x)+...=x-\frac{x^3}{6}.$$

Пример 2.

Требуется решить следующую ИУ Вольтерра МВИ:

$$y(x)=12x+x^2-2x^3-\frac{x^6}{30}-11\sin x+2\int_0^x (x-t)^3y(t)dt.$$

Сначала дифференцируем это уравнение по x и имеем следующую интегро-дифференциальную уравнению вида:

$$y'(x)=12+2x-6x^2-\frac{x^5}{5}-11\cos x+6\int_0^x (x-t)^2y(t)dt.$$

Используя формулу (2) запишем следующую итерационную формулу:

$$y_{n+1}(x)=y_n(x)-\int_0^x\Bigg(y_n'(s)-12-2s+6s^2+\frac{s^5}{5}+$$

$$+11\cos s-6\int_0^s (s-r)^2y_n(r)dr\Bigg)ds.$$

Начальное приближение $y_0=y(0)=0$. Дальнейшие приближения равны:

$$y_1(x)=y_0(x)-\int_0^x\Bigg(y_0'(s)-12-2s+6s^2+\frac{s^5}{5}+$$

$$+11\cos s-6\int_0^s (s-r)^2y_0(r)dr\Bigg)ds=$$

$$=12x+x^2-2x^3-\frac{x^6}{30}-11\sin x\approx x^2+x-\frac{1}{6}x^3+...;$$

$$y_2(x)=12x+x^2-2x^3+\frac{x^5}{10}-\frac{x^7}{4200}-11\sin x\approx$$

$$\approx x^2+x-\frac{1}{6}x^3+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+...;...;$$

$$y_n(x)\approx x^2+\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...\right).$$

Отсюда $y(x)=\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)=x^2+\sin x.$

Пример 3.

Требуется решить следующую ИУ Вольтерра МВИ:

$$y(x)=\frac{1}{16}(7\cos x+9\cos 3x+4x\sin x)-$$

$$-\int_0^x (x-t)\cos(x-t)y(t)dt.$$

Сначала дифференцируем это уравнение по x и имеем следующую интегро-дифференциальную уравнению вида:

$$y'(x)=\frac{1}{16}(-7\sin x-27\sin 3x+4\sin x+4x\cos x)-$$

$$-\int_0^x [\cos(x-t)-(x-t)\sin(x-t)]y(t)dt.$$

Используя формулу (2) запишем следующую итерационную формулу:

$$y_{n+1}(x)=y_n(x)-$$

$$-\int_0^x\Big(y_n'(s)-\frac{1}{16}(-7\sin s-27\sin 3s+4\sin s+4s\cos s)-$$

$$-\int_0^s [\cos(s-r)-(s-r)\sin(s-r)]y_n(r)dr\Big)ds.$$

Начальное приближение $y_0=y(0)=1$. Дальнейшие приближения равны:

$$y_1(x)=1-\frac{9}{16}\cos x+\frac{9}{16}\cos 3x-\frac{3}{4}x\sin x\approx$$

$$\approx 1-3x^2+2x^4-\frac{23}{40}x^6+\ldots;$$

$$y_2(x)\approx 1-3x^2+\frac{9}{4}x^4-\frac{2}{3}x^6+\ldots;$$

$$y_3(x)\approx 1-3x^2+\frac{9}{4}x^4-\frac{27}{40}x^6+\frac{13}{120}x^8+\ldots;\ \ldots;$$

$$y_n(x)\approx 1-3x^2+\frac{9}{4}x^4-\frac{27}{40}x^6+\frac{243}{2240}x^8+\ldots.$$

Отсюда $y(x)=\lim_{n\to\infty} y_n(x)=\frac{1}{3}(2\cos 3x+1)$.

Пример 4.

Требуется решить следующую ИУ Вольтерра МВИ:

$$y(x)=1+\sin^2 x-3\int_0^x \sin(x-t)y^2(t)dt.$$

Сначала дифференцируем это уравнение по x и имеем следующую интегро-дифференциальную уравнению вида:

$$y'(x)=\sin 2x-3\int_0^x \cos(x-t)y^2(t)dt.$$

Используя формулу (2) запишем следующую итерационную формулу:

$$y_{n+1}(x)=y_n(x)-$$

$$-\int_0^x\left(y_n'(s)-\sin 2s+3\int_0^s \cos(s-r)y_n^2(r)dr\right)ds.$$

Начальное приближение $y_0=y(0)=1$. Дальнейшие приближения равны:

$$y_1(x)=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x+3\cos x\approx$$

$$\approx 1-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{24}x^4+\frac{29}{720}x^6+\ldots;$$

$$y_2(x)\approx 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\frac{7}{144}x^6+\ldots;$$

$$y_3(x)\approx 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+\ldots;\ldots;$$

$$y_n(x)\approx 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\ldots.$$

Отсюда имеем $y(x)=\lim_{n\to\infty} y_n(x)=\cos x$.

Выводы.

Примеры 2-4 также были решены с помощью ГММП и были получены такие точные решения. МВИ и ГММП успешно применены к решению интегральных уравнений Вольтерра. Результаты расчетов проверены с помощью Maple. Эти методы полезны и для линейных и для нелинейных уравнений разного порядка и разного типа. Эти методы очень эффективны для нахождения точных и приближенных решений для широких классов проблемы.

References:

1. Abdirashidov, A., Kadirov, N. X., Ortikov, B. B., & Abdurashidov, A. A. (2018). Solution of fractional telegraph and diffusion equations using the approximation methods. *International Scientific Journal «Theoretical & Applied Science», №10*, pp.101-107.
2. Abdirashidov, A., Kadirov, N. X., Ortikov, B. B., & Abdurashidov, A. A. (2018). Solution of fractional telegraph and diffusion equations using the approximation methods. *International Scientific Journal «Theoretical & Applied Science», №10*, pp.101-107.

3. Abdirashidov, A., Ortiqov, B. B., Qadirov, N. X., & Abdurashidov, A. A. (2018). Exact solution of fractional diffusion equations using the variational iteration method and Adomian decomposition method. *International Scientific Journal «Theoretical & Applied Science», №5*, pp.101-107.
4. Abdou, M. A., & Soliman, A. A. (2005). New applications of variational iteration method. *Phys. D*, ***211*** *(1-2)*, 1-8.
5. Abdurashidov, A. A., Ortiqov, B. B., Qadirov, N. X., & Abdirashidov, A. (2018). Exact solution of nonlinear equations Burgers-Huxley, Korteweg-de Vries-Burgers and Klein-Gordon using the modified simple equation method. *International Scientific Journal «Theoretical & Applied Science», №3*, pp.101-107.
6. Aghazadeh, N., & Mohammadi, S. (2012). A modified homotopy perturbation method for solving linear and nonlinear equations. *International Journal of Nonlinear Science. Vol. 13 (2012), No.3*, pp. 308-316.
7. He, J. H., & Wu, X. H. (2007). Variational iteration method: New development and applications. *Computers and Mathematics with Applications, 54 (7-8)*: 881-894.
8. He, J. H. (1999). Homotopy perturbation technique. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 178*, pp.257-262.
9. He, J. H. (2007). Variational iteration method-Some recent results and new interpretations. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 207*, 3-17.
10. Kudryashov, N. A. (2010). *Metodi nelineynoy matematicheskoy fiziki:* Uchebnoye posobiye. 2-ye izd. (p.368). Dolgoprudniy: Intellekt.
11. Mamatov, S. S., & Abdirashidov, A. (2014). Integral tenglamalarni taqribiy yechish usullari. Uslubiy qo'llanma. (p.124). Samarqand: SamDU nashri.
12. Wazwaz, A. M. (2015). *A First Cours in Integral Equations. Second Edition*. (p.331). Chicago: Saint Xavier University.
13. Wazwaz, A. M. (2011). *Linear and Nonlinear Integral Equations.* Method and Applications. (p.658). Chicago: Saint Xavier University.