SECTION 1. Theoretical research in mathematics.

Kestelman Vladimir Nikolayevich
Professor,
Specialty Scientific Consultant, Russian Technology Initiative, LTD,
President of KVN International, Inc., Philadelphia,
Member of Mid-Atlantic-Russia Business Council and of International
Visitors Council of Philadelphia,
King of Prussia, Pennsylvania, USA

Shevtsov Alexandr Nikolayevich
candidate of technical Sciences,
President, Theoretical & Applied Science, LLP,
associate Professor of the Department «Applied mathematics»
Taraz State University named after M.Kh. Dulati, Kazakhstan

Nadirbekova Ainur Shyrynkhanovna
candidate of physical and mathematical Sciences,
associate Professor of the Department of «Theoretical mathematics»,
Taraz State pedagogical Institute,
Kazakhstan

ON SOME SOLUTIONS OF FREDHOLM EQUATIONS 2 KIND SQUARE METHOD

This article discusses some methods for solving integral equations.
Keywords: Fredholm equation, squares method.

О НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА 2 РОДА МЕТОДОМ КВАДРАТУР

В статье рассматриваются некоторые методы решения интегральных уравнений.
Ключевые слова: уравнение Фредгольма, метод квадратур.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2 рода

$$y(x)+\int_a^b K(x,s)\,y(s)\,ds = f(x),$$

где в качестве ядра и исследуемой функции выберем следующие:

$$K(x,s) = \frac{1}{z_1 + z_2 \cos(x+s)},$$
$$f(x) = z_3 + z_4 \sin^2 x.$$

Здесь z_1, z_2, z_3, z_4 - постоянные числа, a и b - рассматриваемый интервал $(-\pi, \pi)$, тогда получим

$$y(x) + \int_a^b \frac{1}{z_1 + z_2 \cos(x+s)} y(s)\, ds = z_3 + z_4 \sin^2 x.$$

Рассмотрим четырех точечную формулу для $n=12$, и частный случай $(z_1 = 6.8, z_2 = -3.2, z_3 = 25, z_4 = -16)$

$$y(x) + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{y(s)ds}{6{,}8 - 3{,}2\cos(x+s)} = 25 - 16\sin^2 x \qquad (1)$$

При n=12, для четырехточечной формулы рассмотрим следующие условия:

$$h = 2\pi/12 = \pi/6, A_j = \pi/6.$$

Тогда, запишем разностную схему для уравнения (1)

$$y_i + \frac{\pi}{6}\sum_{j=}^{n} K_{ij} y_j = 25 - 16\sin^2 x_i \qquad (2)$$

Найдем значения ядра K_{ij} и запишем их в таблицу.

$x_i \backslash x_j$	$-\pi$	$-\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$
0	0,100	0,105	0,119	0,147	0,192	0,247	0,278	0,247	0,192	0,147	0,119	0,105
$\frac{\pi}{6}$	0,105	0,119	0,147	0,192	0,247	0,278	0,247	0,192	0,147	0,119	0,105	0,100
$\frac{\pi}{3}$	0,119	0,147	0,192	0,247	0,278	0,247	0,192	0,147	0,119	0,105	0,100	0,105
$\frac{\pi}{2}$	0,147	0,192	0,247	0,278	0,247	0,192	0,147	0,119	0,105	0,100	0,105	0,119

Учитывая симметрию искомого решения, упростим уравнение. Поэтому вопервых, если функция *y(x)* является решением уравнения (1), тогдафункция *y(-x)* также является его решением. Поэтому, для интегрального уравнения выполняется равенство *y(-x)=y(x)*, значит *y(x)* является четной функцией.

Обозначим интеграл через

$$I(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{y(s)ds}{6{,}8-3{,}2\cos(x+s)}$$

и проверим следующее условие

$$I(x)=I(-x)=I(\pi-x) \tag{3}$$

$$I(-x)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{y(s)ds}{6{,}8-3{,}2\cos(-x+s)}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{y(s)ds}{6{,}8-3{,}2\cos(x-s)}.$$

Введем замену $\pi-s=t$, тогда

$$I(-x)=-\int_{\pi}^{-\pi}\frac{y(-t)dt}{6{,}8-3{,}2\cos(x+t)}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{y(t)dt}{6{,}8-3{,}2\cos(x+t)}=I(x)$$

Поэтому

$$I(\pi-x)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{y(s)ds}{6{,}8-3{,}2\cos(\pi-x+s)}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{y(s)ds}{6{,}8-3{,}2\cos(x-(\pi+s))},$$

Сделаем подстановку $\pi+s=-t$

$$I(\pi-x)=-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{y(t)dt}{6{,}8-3{,}2\cos(x+t)}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{y(t)dt}{6{,}8-3{,}2\cos(x+t)}=I(x)$$

Учитывая формулу (3) получим следующее условие для функции $y(x)$

$$y(x)=y(-x)=y(\pi-x)$$

При $x=0,\ x=\pm\frac{\pi}{2}$ в случае симметрии решения,

$$\left.\begin{aligned}
&y(-\pi)=y(0)=y(\pi),y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=y\left(\frac{\pi}{2}\right),\\
&y(-\frac{5}{6}\pi)=y(-\frac{\pi}{6})=y\left(\frac{\pi}{6}\right)=y\left(\frac{5}{6}\pi\right),\\
&y(-\frac{2}{3}\pi)=y(-\frac{\pi}{3})=y\left(\frac{\pi}{3}\right)=y\left(\frac{2}{3}\pi\right),
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

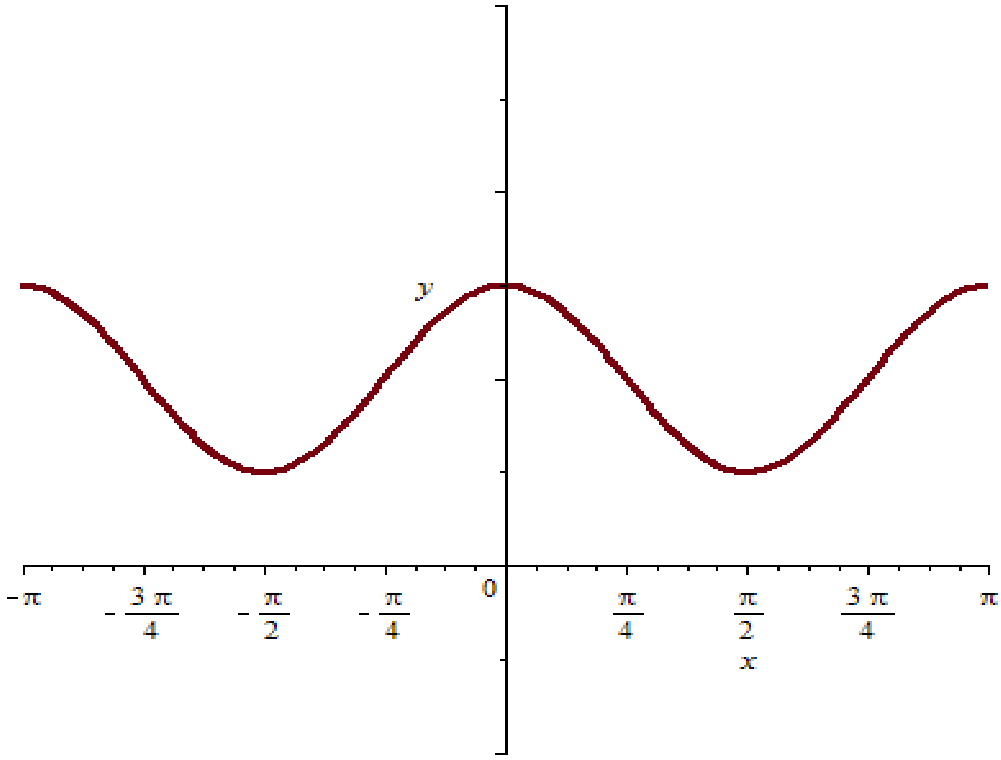

Рисунок 1 – Предполагаемая симметрия искомой функции.

Учитывая

$$y_1 = y(0),$$
$$y_2 = y(\pi/6),$$
$$y_3 = y(\pi/3),$$
$$y_4 = y(\pi/2)$$

и выражение (4), подставим в систему (2)

$$y_1 + \frac{\pi}{6}[y_1(K(0,-\pi) + K(0,0)) + y_2\left(K\left(0,-\frac{5}{6}\pi\right) + K\left(0,-\frac{\pi}{6}\right) + K\left(0,\frac{\pi}{6}\right) + K\left(0,\frac{5}{6}\pi\right)\right) + y_3\left(K\left(0,-\frac{2}{3}\pi\right) + K\left(0,-\frac{\pi}{3}\right) + K\left(0,\frac{\pi}{3}\right) + K\left(0,\frac{2}{3}\pi\right)\right) + y_4\left(K\left(0,-\frac{\pi}{2}\right) + K\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)] = 25,$$

$$y_2 + \frac{\pi}{6}[y_1(K(\frac{\pi}{6},-\pi) + K(\frac{\pi}{6},0)) + y_2\left(K\left(\frac{\pi}{6},-\frac{5}{6}\pi\right) + K\left(\frac{\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right) + K\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right) + K\left(\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi\right)\right) + y_3\left(K\left(\frac{\pi}{6},-\frac{2}{3}\pi\right) + K\left(\frac{\pi}{6},-\frac{\pi}{3}\right) + K\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right) + K\left(\frac{\pi}{6},\frac{2}{3}\pi\right)\right) + y_4\left(K\left(\frac{\pi}{6},-\frac{\pi}{2}\right) + K\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)\right)] = 21,$$

$$y_3+\frac{\pi}{6}[y_1(K(\frac{\pi}{3},-\pi)+K(\frac{\pi}{3},0))+y_2\left(K\left(\frac{\pi}{3},-\frac{5}{6}\pi\right)+K\left(\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right)+K\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)+K\left(\frac{\pi}{3},\frac{5}{6}\pi\right)\right)+$$
$$y_3\left(K\left(\frac{\pi}{3},-\frac{2}{3}\pi\right)+K\left(\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right)+K\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)+K\left(\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi\right)\right)+y_4\left(K\left(\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{2}\right)+K\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)\right)]=13,$$

$$y_4+\frac{\pi}{6}[y_1(K(\frac{\pi}{2},-\pi)+K(\frac{\pi}{2},0))+y_2\left(K\left(\frac{\pi}{2},-\frac{5}{6}\pi\right)+K\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right)+K\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)+K\left(\frac{\pi}{2},\frac{5}{6}\pi\right)\right)+$$
$$y_3\left(K\left(\frac{\pi}{2},-\frac{2}{3}\pi\right)+K\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right)+K\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right)+K\left(\frac{\pi}{2},\frac{2}{3}\pi\right)\right)+y_4\left(K\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)+K\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)]=9,$$

,

Составим систему для значений ядра $K(x_i,x_j)=K_{ij}$ показанных в таблице, y_i (i=1,2,3,4), найдем коэффициенты, тогда получим следующее выражение

$$\begin{aligned}
&1{,}19y_1+0{,}35y_2+0{,}31y_3+0{,}15y_4=25,\\
&0{,}18y_1+1{,}34y_2+0{,}32y_3+0{,}16y_4=21,\\
&0{,}16y_1+0{,}32y_2+0{,}34y_3+0{,}18y_4=13,\\
&0{,}15y_1+0{,}31y_2+0{,}35y_3+1{,}19y_4=9,
\end{aligned}$$

Решим ее на Maple

```
>
restart;
 n := 12;
 f := 25 - 16*(sin(x))^2;
R0 :=   y(x) + Int(y(s)/(6.8-3.2*cos(x + s)), s=-Pi..Pi) = f;

        h := 2*Pi/12;

        A[j] = h;
   ff := subs(x = x[i], f);

   y[i] + h*Sum(K[i, j]*y[j], j = 1..n) = ff;
```

$n := 12$

$f := 25 - 16\ \sin(x)^2$

$$R0 := y(x) + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{y(s)}{6.8 - 3.2\ \cos(x+s)}\,\mathrm{d}s = 25 - 16\ \sin(x)^2$$

$$h := \frac{1}{6}\ \pi$$

$$A_j = \frac{1}{6}\ \pi$$

$$ff := 25 - 16\ \sin(x_i)^2$$

$$y_i + \frac{1}{6}\ \pi\ \left(\sum_{j=1}^{12} K_{i,j}\ y_j\right) = 25 - 16\ \sin(x_i)^2$$

\>

```
with(LinearAlgebra):
 K := Matrix(4, 12, [0.1, 0.105, 0.119, 0.147, 0.192, 0.247, 0.278,
  0.247, 0.192, 0.147, 0.119, 0.105, 0.105, 0.119, 0.147, 0.192,
  0.247, 0.278, 0.247, 0.192, 0.147, 0.119, 0.105, 0.100, 0.119,
  0.147, 0.192, 0.247, 0.278, 0.247, 0.192, 0.147, 0.119, 0.105,
  0.1, 0.105, 0.147, 0.192, 0.247, 0.278, 0.247, 0.192, 0.147,
  0.119, 0.105, 0.1, 0.105, 0.119]);
```

$$K := \left[\begin{array}{c} \textit{4 x 12 Matrix} \\ \textit{Data Type: anything} \\ \textit{Storage: rectangular} \\ \textit{Order: Fortran\_order} \end{array}\right]$$

\>

```
II(x) := evalf(Int((s)/(6.8-3.2*cos(x+s)), s=-Pi..Pi, method
   =_CCquad));
```

$$II := x \rightarrow evalf\left(Int\left(\frac{s}{6.8 + (-1)\cdot 3.2\ \cos(x+s)}, s = -\pi..\pi, method = \_CCquad\right)\right)$$

```
plot(II(x), x=-Pi..Pi):
 yj := -Pi, -Pi·5/6, -Pi·2/3, -Pi/2, -Pi/3, -Pi/6, 0, Pi/6, Pi/3, Pi/2, Pi·2/3, Pi·5/6;
 xi := 0, Pi/6, Pi/3, Pi/2;
```

\>

$$yj := -\pi, -\frac{5}{6}\ \pi, -\frac{2}{3}\ \pi, -\frac{1}{2}\ \pi, -\frac{1}{3}\ \pi, -\frac{1}{6}\ \pi, 0, \frac{1}{6}\ \pi, \frac{1}{3}\ \pi, \frac{1}{2}\ \pi, \frac{2}{3}\ \pi, \frac{5}{6}\ \pi$$

$$\xi := 0, \frac{1}{6}\ \pi, \frac{1}{3}\ \pi, \frac{1}{2}\ \pi$$

```
with(linalg):

z1 := evalf(subs(x=xi[1], f));
z2 := evalf(subs(x=xi[2], f));
z3 := evalf(subs(x=xi[3], f));
z4 := evalf(subs(x=xi[4], f));
```

$$Sys := y1 + evalf\left(\frac{Pi}{6}\right)\cdot(y1\cdot(K[1,1]+K[1,7]) + y2\cdot(K[1,2]+K[1,6] + K[1,8]+K[1,12]) + y3\cdot(K[1,3]+K[1,5]+K[1,9]+K[1,11]) + y4\cdot(K[1,4]+K[1,10])) = z1,\ y2 + evalf\left(\frac{Pi}{6}\right)\cdot(y1\cdot(K[2,1]+K[2,7]) + y2\cdot(K[2,2]+K[2,6]+K[2,8]+K[2,12]) + y3\cdot(K[2,3]+K[2,5] + K[2,9]+K[2,11]) + y4\cdot(K[2,4]+K[2,10])) = z2,\ y3 + evalf\left(\frac{Pi}{6}\right)\cdot(y1\cdot(K[3,1]+K[3,7]) + y2\cdot(K[3,2]+K[3,6]+K[3,8]+K[3,12]) + y3\cdot(K[3,3]+K[3,5]+K[3,9]+K[3,11]) + y4\cdot(K[3,4]+K[3,10])) = z3,\ y4 + evalf\left(\frac{Pi}{6}\right)\cdot(y1\cdot(K[4,1]+K[4,7]) + y2\cdot(K[4,2]+K[4,6] + K[4,8]+K[4,12]) + y3\cdot(K[4,3]+K[4,5]+K[4,9]+K[4,11]) + y4\cdot(K[4,4]+K[4,10])) = z4;$$

\>

$z1 := 25.$

$z2 := 21.00000000$

$z3 := 13.00000000$

$z4 := 9.$

$$Sys := 1.197920337\ y1 + 0.3686135382\ y2 + 0.3256784385\ y3 + 0.1539380401\ y4 = 25.,\ 1.360759556\ y2 + 0.1843067691\ y1 + 0.3382448092\ y3 + 0.1628392193\ y4 = 21.00000000,\ 1.360759556\ y3 + 0.1628392193\ y1 + 0.3382448092\ y2 + 0.1843067691\ y4 = 13.00000000,\ 1.197920337\ y4 + 0.1539380401\ y1 + 0.3256784385\ y2 + 0.3686135382\ y3 = 9.$$

\>

```
AA := genmatrix({Sys}, [y1, y2, y3, y4], flag);

B := matrix(4, 1, col(AA, 5));

A := delcols(AA, 5..5);

Aobr := inverse(A);

XX := evalm(Aobr.B);
```

$$AA := \begin{bmatrix} 1.197920337 & 0.3686135382 & 0.3256784385 & 0.1539380401 & 25. \\ 0.1843067691 & 1.360759556 & 0.3382448092 & 0.1628392193 & 21.00000000 \\ 0.1628392193 & 0.3382448092 & 1.360759556 & 0.1843067691 & 13.00000000 \\ 0.1539380401 & 0.3256784385 & 0.3686135382 & 1.197920337 & 9. \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 25. \\ 21.00000000 \\ 13.00000000 \\ 9. \end{bmatrix}$$

$$A := \begin{bmatrix} 1.197920337 & 0.3686135382 & 0.3256784385 & 0.1539380401 \\ 0.1843067691 & 1.360759556 & 0.3382448092 & 0.1628392193 \\ 0.1628392193 & 0.3382448092 & 1.360759556 & 0.1843067691 \\ 0.1539380401 & 0.3256784385 & 0.3686135382 & 1.197920337 \end{bmatrix}$$

$$Aobr := \begin{bmatrix} 0.8925728914 & -0.1889900938 & -0.1487346230 & -0.06612553603 \\ -0.09449504694 & 0.8182055802 & -0.1606205830 & -0.07436731153 \\ -0.07436731153 & -0.1606205830 & 0.8182055802 & -0.09449504689 \\ -0.06612553599 & -0.1487346230 & -0.1889900938 & 0.8925728910 \end{bmatrix}$$

$$XX := \begin{bmatrix} 15.81685039 \\ 12.06256763 \\ 4.554002087 \\ 0.799719317 \end{bmatrix}$$

>

Решив систему, получим

$$y_1 = 15.81685039,$$
$$y_2 = 12.06256763,$$
$$y_3 = 4.554002087,$$
$$y_4 = 0.799719317.$$

С учетом условия (4), и частных решений y_i перепишем систему (4) в виде ряда

$$y(x) = \frac{\pi}{6}\sum_{j=1}^{12}\frac{y_j}{6{,}8 - 3{,}2\cos(x + x_j)}$$

Приближенные решения уравнения получим в виде

$$\tilde{y}(x) = 8{,}50 + 7{,}53\cos 2x$$

\>

$$yv := 8.5 + 7.53\cos(2\cdot x);$$
$$yv0 := evalf(subs(x=0, yv));$$
$$yv1 := evalf\left(subs\left(x=\frac{\mathrm{Pi}}{6}, yv\right)\right);$$
$$yv2 := evalf\left(subs\left(x=\frac{\pi}{3}, yv\right)\right);$$
$$yv3 := evalf\left(subs\left(x=\frac{\mathrm{Pi}}{2}, yv\right)\right);$$

$$yv := 8.5 + 7.53\cos(2\,x)$$
$$yv0 := 16.03$$
$$yv1 := 12.26500000$$
$$yv2 := 4.734999996$$
$$yv3 := 0.97$$

$$\tilde{y}(0) = 16{,}030,$$
$$\tilde{y}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 12{,}265,$$
$$\tilde{y}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4{,}734999996,$$
$$\tilde{y}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}970.$$

Абсолютная погрешность между точным и приближенным решением составит:

\>

$$\mathrm{abs}(XX[1,1]-yv0);\ \mathrm{abs}(XX[2,1]-yv1);\ \mathrm{abs}(XX[3,1]-yv2);\ \mathrm{abs}(XX[4,1]-yv3);$$

$$0.21314961$$
$$0.20243237$$
$$0.180997909$$
$$0.170280683$$

$$|y_1 - \tilde{y}(0)| = |15{,}81685039 - 16{,}03| = 0{,}21314961,$$

$$\left| y_2 - \tilde{y}(\frac{\pi}{6}) \right| = |12{,}06256763 - 12{,}265| = 0{,}20243237,$$

$$\left| y_3 - \tilde{y}(\frac{\pi}{3}) \right| = |4{,}554002087 - 4{,}734999996| = 0{,}180997909,$$

$$\left| y_4 - \tilde{y}(\frac{\pi}{2}) \right| = |0{,}799719317 - 0{,}970| = 0{,}170280683.$$

Попробуем улучшить полученный результат используя компьютер и среду Delphi для разработки программы.

Зададим переменные и введем исходные данные:

code:Delphi

```
procedure TForm1.FormCreate(Sender: TObject);
begin
x[1]:=0;
x[2]:=pi/6;
x[3]:=pi/3;
x[4]:=pi/2;

y[1]:=15.81685039;
y[2]:=12.06256763;
y[3]:=4.554002087;
y[4]:=0.799719317;

for i := 1 to 4 do
begin
StringGrid1.Cells[0,i]:=inttostr(i);
StringGrid1.Cells[1,i]:=floattostr(x[i]);
StringGrid1.Cells[2,i]:=floattostr(y[i]);
end;

StringGrid1.Cells[1,0]:='X(i)';
StringGrid1.Cells[2,0]:='Y(i)';
end;
```

Найдем суммарную абсолютную погрешность в четырех исследуемых точках:

code:Delphi

```
var
  Form1: TForm1;
i,j,k,kj:integer;
```

```
x,y:array[1..4]of real;
xx,yy,a,b,d,aa,bb,dd,aaa,bbb:real;
implementation
{$R *.dfm}

procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
begin
for i := 1 to 4 do
begin
series2.AddXY(x[i],y[i]);
end;
d:=0;
a:=strtofloat(edit1.Text);
b:=strtofloat(edit2.Text);

for I := -360 to 360 do
begin
xx:=0+i*pi/360;
yy:=a+b*cos(2*xx);
series1.AddXY(xx,yy);

for j := 1 to 4 do
if xx=x[j] then d:=d+abs(yy-y[j]);
end;

edit3.Text:=floattostr(d);

end;
```

Отобразим все исходные данные в таблице, а коэффициенты в виде функции (рис.2).

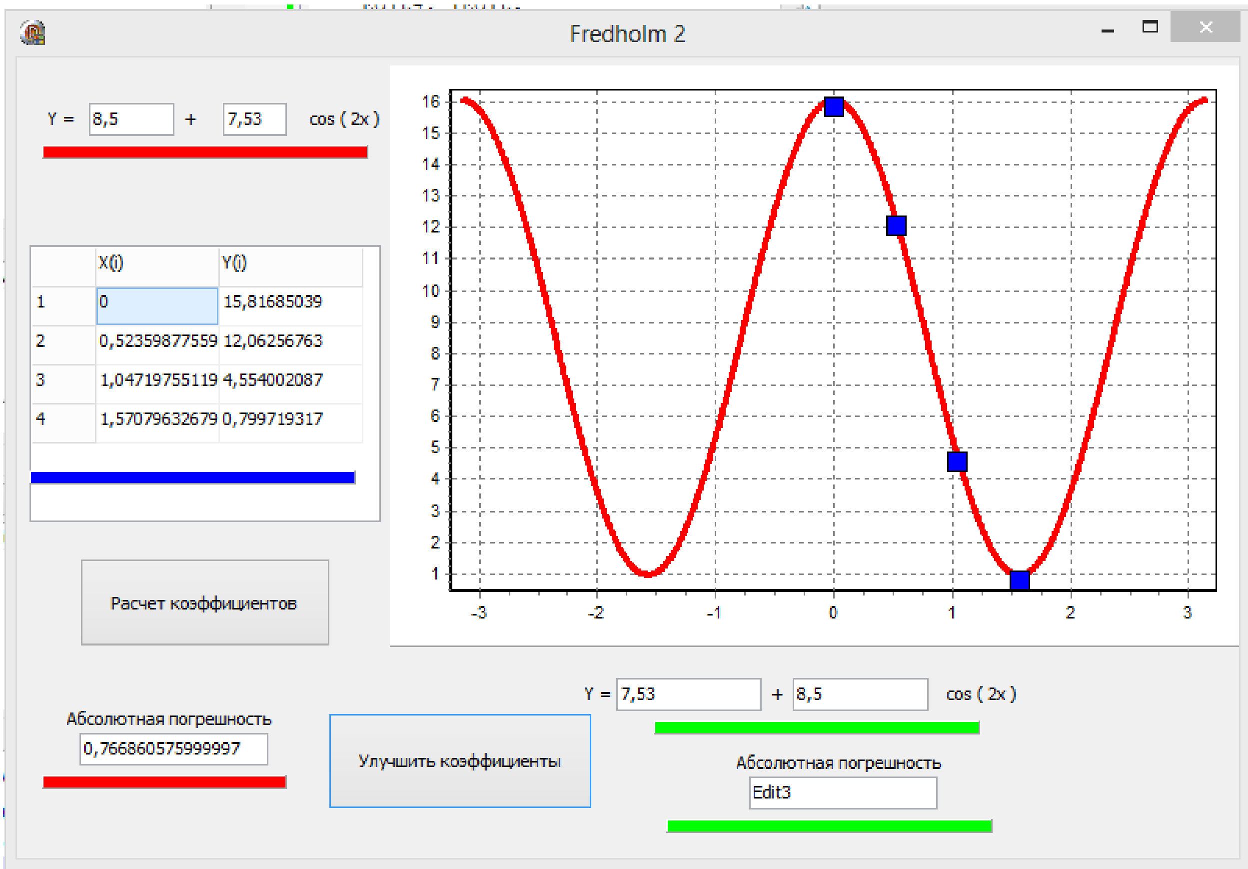

Рисунок 2 – Исходная функция в первом приближении.

Зададим область смещения двух коэффициентов функции, и разработаем алгоритм улучшения коэффициентов.

code:Delphi

```
procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject);
begin
dd:=1;
for I := -1000 to 1000 do
for j := -1000 to 1000 do
begin
d:=0;
aa:=a+i/1000;
bb:=b+j/1000;
for k := -360 to 360 do
begin
xx:=0+k*pi/360;
yy:=aa+bb*cos(2*xx);

for kj := 1 to 4 do
if xx=x[kj] then d:=d+abs(yy-y[kj]);
end;
```

```
if d<dd then  begin
dd:=d;
aaa:=aa;
bbb:=bb;
edit4.Text:=floattostr(aa);
edit5.Text:=floattostr(bb);
edit6.Text:=floattostr(dd);
end;
application.ProcessMessages;
end;

for I := -360 to 360 do
begin
xx:=0+i*pi/360;
yy:=aaa+bbb*cos(2*xx);
series3.AddXY(xx,yy);
end;
end;
```

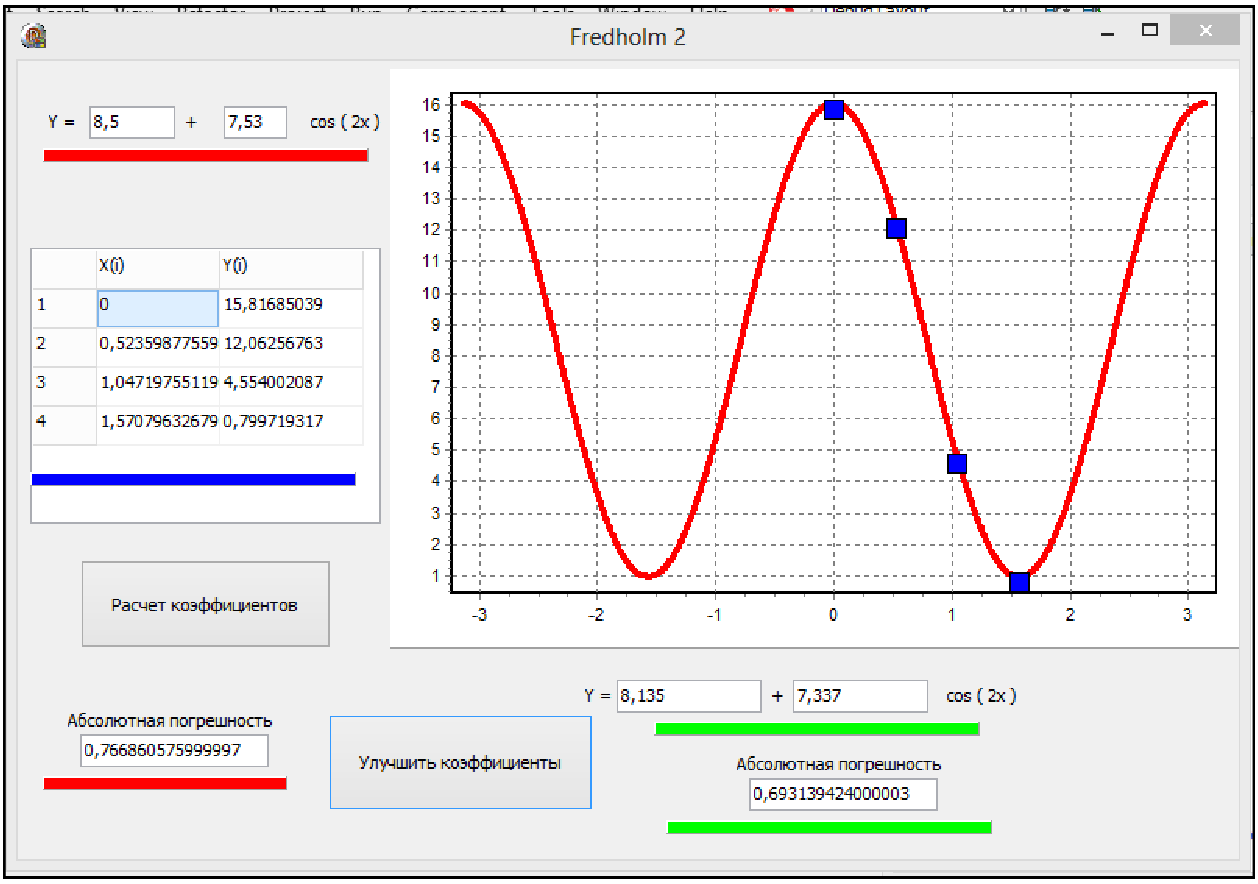

Рисунок 3 – Динамическое вычисление коэффициентов.

В программе при нахождении минимальной погрешности, происходит обновление коэффициентов (рис.3) в реальном времени.

Проверка всей области с мощностью 4 млн. точек на двухядерном 64 битном компьютере с 4 Гб оперативной памяти заняло 4 минуты, без включения многопоточного режима (рис.4).

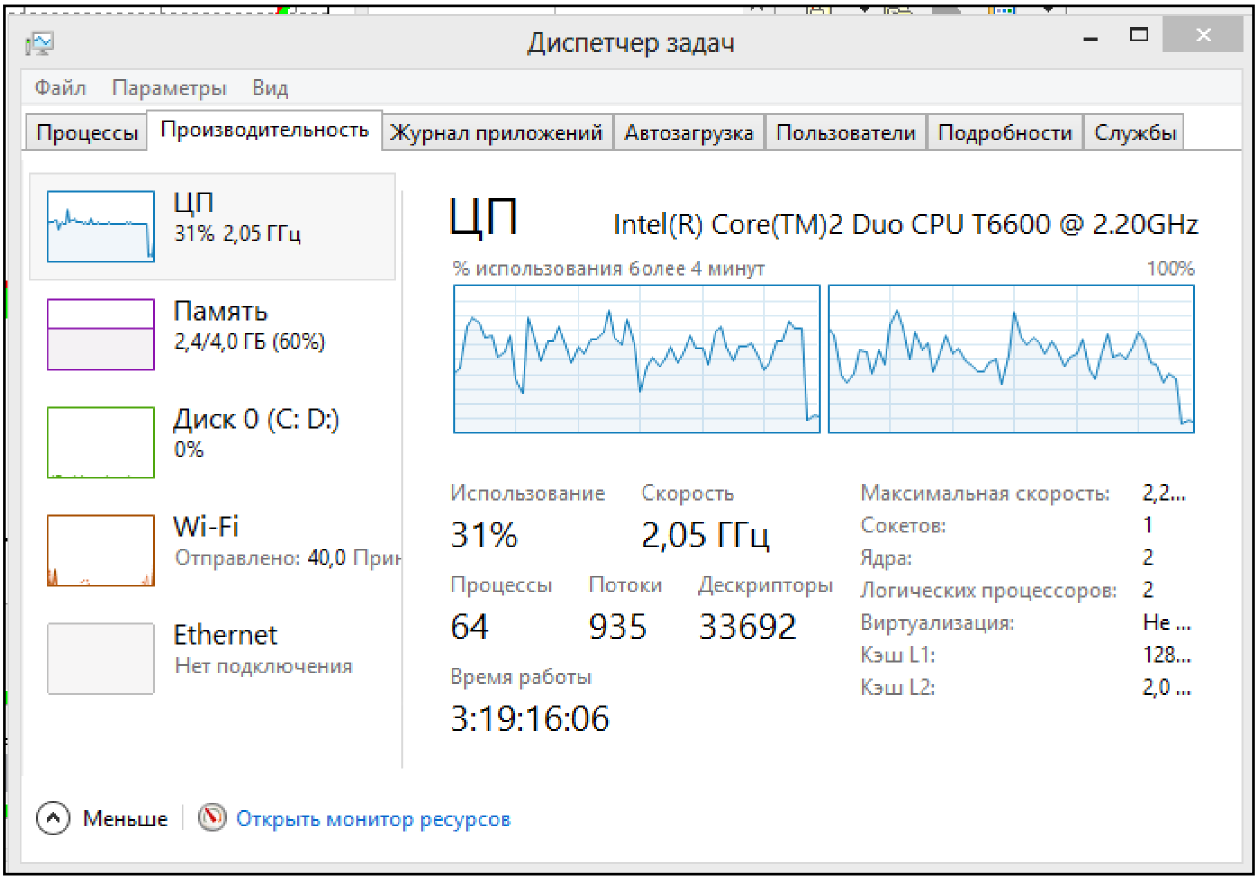

Рисунок 4 – Эффективность работы алгоритма.

В результате работы программы получим следующие значения коэффициентов функции, в 700 раз более точные чем до этого (рис.5).

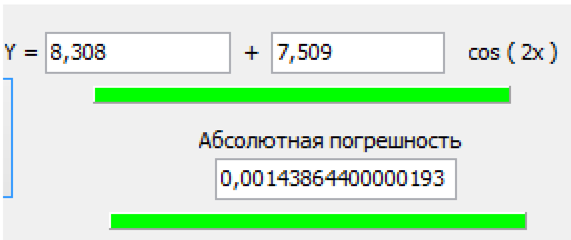

Рисунок 5 – Абсолютная погрешность и улучшенные коэффициенты.

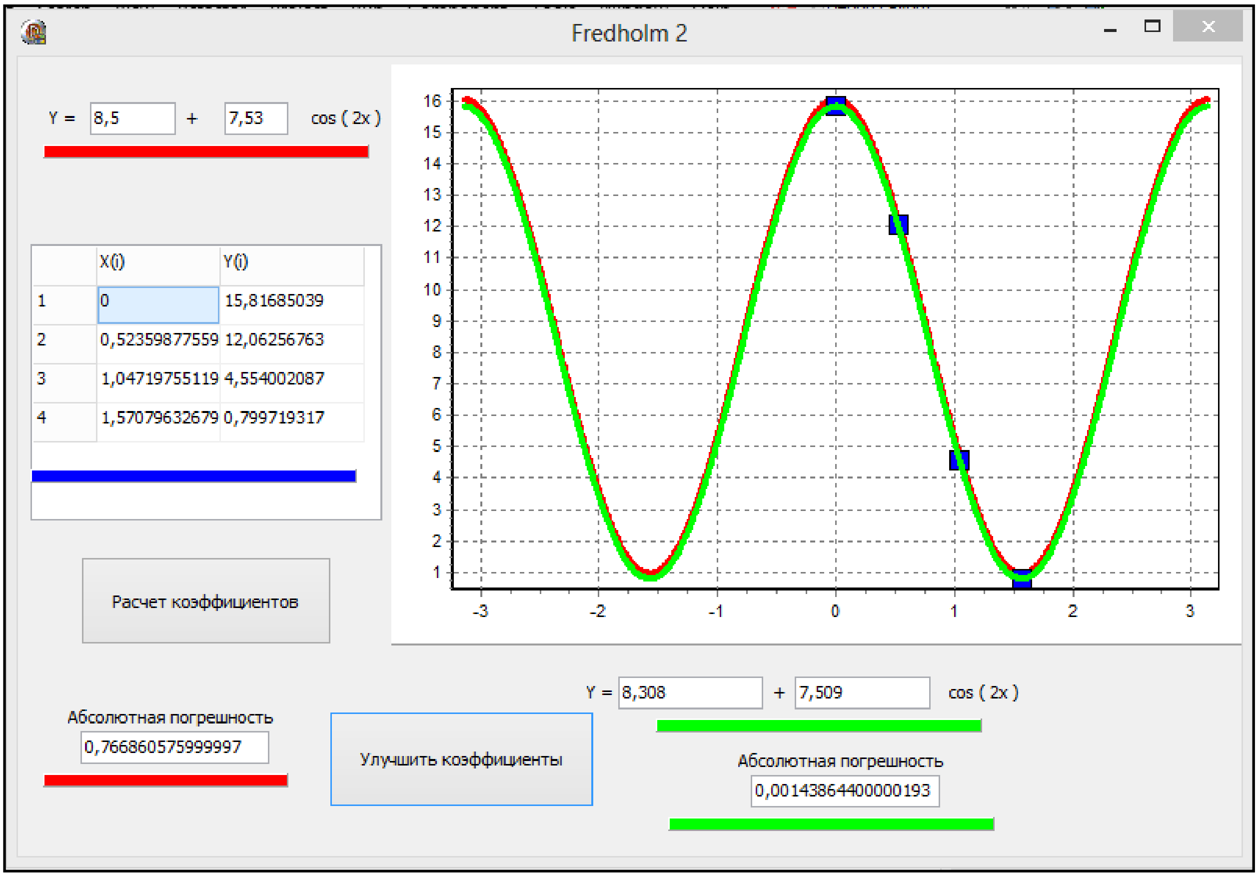

Рисунок 6 – График функции полученного решения.

Разработанные алгоритмы и программы позволяют дать более точную оценку, и решение уравнения Фредгольма, для некоторых симметричных тригонометрических функций, а также могут успешно применяться в качестве лабораторных занятий по этой теме в университетах.