SECTION 2. Applied mathematics. Mathematical modeling.

Naumov Anatoly Aleksandrovich,
Docent, candidate of Technical Sciences,
Center of Applied Mathematical Research, Novosibirsk, Russia,
e-mail: A_A_Naumov@mail.ru

TO S_p-INSTABILITY OF NORMALIZATION OF MULTICRITERIAL CRITERIA METHOD FOR DECIDING OF OPTIMIZATION PROBLEMS

In the paper the stability of the method of normalization criteria used to solve multi-criteria optimization problems is studied.

Key words: Multi-criteria problems, method of normalization criteria, sustainability

К S_p-НЕУСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДА НОРМАЛИЗАЦИИ КРИТЕРИЕВ РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

В работе исследован на устойчивость метод нормализации критериев, используемый для решения многокритериальных задач оптимизации.

Ключевые слова: Многокритериальные задачи, метод нормализации критериев, устойчивость.

В работе исследован на устойчивость метод нормализации критериев, используемый для решения многокритериальных задач оптимизации (см. [3]-[6]).

Постановка задачи. Предположим, что необходимо решить многокритериальную задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \to \max, \\ &f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \to \max, \\ &\qquad\dots \\ &f_p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \to \max, \end{aligned} \tag{1}$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \le b_1, \\ g_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \le b_2, \\ \qquad\dots \\ g_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \le b_m. \end{cases} \tag{2}$$

Предположим, что область допустимых решений задачи (обозначим ее через D), образованная ограничениями (2), является непустой и ограниченной. Таким образом, на этой области существуют оптимальные решения задачи для каждого из критериев множества (1).

Основная идея метода нормализации критериев состоит в переходе от многокритериальной задачи (1)-(2) к скалярной задаче следующего вида (см. [3]):

$$\lambda \to \max, \tag{3}$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \lambda - \lambda_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \le 0, \\ \lambda - \lambda_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \le 0, \\ \dots \\ \lambda - \lambda_p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \le 0, \\ g_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \le b_1, \\ g_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \le b_2, \\ \dots \\ g_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \le b_m. \end{cases} \tag{4}$$

где

$$\lambda_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \frac{f_1(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) - f_1^{min}}{f_1^{max} - f_1^{min}},$$

$$\lambda_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \frac{f_2(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) - f_2^{min}}{f_2^{max} - f_2^{min}},$$

$$\dots$$

$$\lambda_p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \frac{f_p(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) - f_p^{min}}{f_p^{max} - f_p^{min}},$$

$$\lambda = \min\Big(\lambda_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \lambda_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \dots, \lambda_p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)\Big);$$

f_i^{min}, f_i^{max}, $i = 1,2,3, \dots, p$, – это наименьшие и наибольшие значения соответствующих критериев из множества (1) на области допустимых решений (2). Таким образом, нормализация критериев – это прием, сводящий задачу векторной оптимизации к задаче с одним критерием.

Введем основные обозначения для элементов задачи многокритериальной оптимизации. Целевые функции задачи (1) сведем в общий (единый) вектор

$$F = \Big(f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n),\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \dots,\ f_p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)\Big)$$

и будем считать, как и выше, что все функции этого вектора необходимо максимизировать. Ограничения (2) объединим во множество $S = \{g_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \le b_1,\ g_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) b_2, \dots,\ g_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \le b_m\}$. Тогда, саму задачу многокритериальной оптимизации обозначим в виде кортежа: $P = \langle F, S \rangle$. Последняя запись читается таким образом: требуется найти максимум векторной функции F при ограничениях S. Или найти $F \to \max$ при ограничениях S. Введем в рассмотрение следующие определения.

Определение 1. Парето-множество задачи $P = \langle F, S \rangle$ обозначим через D_π, а множество ограничений задачи его определяющее – через S_π и назовем **множеством активных ограничений**.

Определение 2. Для фиксированного множества ограничений S (и, следовательно, области D) введем в рассмотрение отображения: $S \xrightarrow{F} S_\pi$ и, аналогично, $D \xrightarrow{F} D_\pi$.

Определение 3. Множество ограничений из S не входящее во множество активных ограничений S_π назовем **множеством пассивных ограничений** задачи $P = \langle F, S \rangle$ и обозначим через S_p. Таким образом, $S = S_\pi \cup S_p$, а $S_\pi \cap S_p = \emptyset$.

Определение 4. Две задачи P_1 и P_2 назовем $\boldsymbol{D_\pi}$ **-эквивалентными**, если они имеют одинаковые множества Парето, т.е. выполняется $D_{\pi,P_1} = D_{\pi,P_2}$. Эквивалентность задач обозначим следующим образом: $P_1 \sim_{D_\pi} P_2$.

Заметим, что D_π -эквивалентные задачи в общем случае могут иметь не совпадающие между собой векторы критериев ($F_{P_1} \neq F_{P_2}$) и множества ограничений ($S_{P_1} \neq S_{P_2}$). Аналогично определению для D_π -эквивалентных задач, можно ввести определения для $\langle D_\pi, F \rangle$ -, $\langle D_\pi, S \rangle$ -, $\langle S_\pi, F \rangle$ - эквивалентных задач.

Определение 5. Метод (*M*) решения задачи $\langle F, S \rangle$ – это отображение пары $\langle F, S \rangle$ в некоторую область (точку) x^* области D_π, т.е. $\langle F, S \rangle \xrightarrow{M} x^* \in D_\pi$ или $M: \langle F, S \rangle \to x^* \in D_\pi$ (для точки x^*).

Определение 6. Метод (M) решения задачи ($P = \langle F, S \rangle$) является $\boldsymbol{S_p}$ **-устойчивым**, если решение задачи, найденное этим методом, не меняется при изменении элементов множества S_p. При этом элементы вектора F и множества D_π являются фиксированными и не изменяются при изменении S_p. Формально это свойство метода M можно записать таким образом:

$$\forall_{S_{p1} \neq S_{p2}} \left(M: \langle F, S = S_\pi \cup S_{p1} \rangle \to x_1^* \in D_\pi \;\&\; M: \langle F, S = S_\pi \cup S_{p2} \rangle \to x_2^* \in D_\pi \right) \Rightarrow x_1^* = x_2^* .$$

Отметим, что большинство методов, предназначенных для решения многокритериальных задач оптимизации (см., например, [1], [2]), являются S_p-устойчивыми. Это свойство методов представляется очевидным, поскольку было бы нелогично, если бы решения таких задач зависели от множеств их пассивных ограничений.

Утверждение. Метод нормализации критериев (см. [3]-[6]) не является S_p -устойчивым.

Литература

1. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. – М: Радио и связь, 1981. – 560 с.

2. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 255 с.
3. Машунин Ю.К. Методы и модели векторной оптимизации. – М.: Наука, 1986. – 140 с.
4. Кириллов Ю.В., Назимко Е.Н. Многокритериальная модель оптимизации структуры капитала// Экономический анализ: теория и практика, 2011, № 32 (239), С. 57–63.
5. Кириллов Ю.В., Назимко Е.Н. Многокритериальная задача оптимизации структуры капитала и ее решение в системе Maple// Экономика и менеджмент систем управления, 2013, т. 8, № 2.1, С. 149-160.
6. Кириллов Ю.В., Досужева Е.Е. Многокритериальная экономико-математическая модель оценки коммерческой эффективности инвестирования// Финансовая аналитика: Проблемы и решения, 2013, № 32, С. 18-24.
7. Список трудов [Электронный ресурс]. URL: https://sites.google.com/site/anatolynaumov2011/home/spisok-trudov-list-of-papers (дата обращения: 25.09.2013).