SECTION 2. Applied mathematics. Mathematical modeling.

Naumov Anatoly Aleksandrovich
Docent, candidate of Technical Sciences,
Center of Applied Mathematical Research, Novosibirsk, Russia,
E-mail: A_A_Naumov@mail.ru

TO S_P-INVARIANCE PROPERTY OF MULTICRITERIA OPTIMIZATION PROBLEMS METHODS

In the paper the invariance of the method of normalization criteria used to solve multi-criteria optimization problems is studied.

Keywords: multi-criteria problems, method of criteria normalization, invariance.

К СВОЙСТВУ S_p-ИНВАРИАНТНОСТИ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

В работе исследован на инвариантность метод нормализации критериев, используемый для решения многокритериальных задач оптимизации.

Ключевые слова: многокритериальные задачи, метод нормализации критериев, инвариантность.

В работе рассмотрено свойство инвариантности относительно множества пассивных ограничений метода нормализации критериев (см. [1]-[4]) решения многокритериальных задач оптимизации.

Постановка задачи и основные определения. Введем обозначения для задачи многокритериальной оптимизации. Целевые функции задачи сведем в единый вектор -

$$\mathrm{F} = \Big(\mathrm{f}_1(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3,\dots,\mathrm{x}_\mathrm{n}),\ \mathrm{f}_2(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3,\dots,\mathrm{x}_\mathrm{n}),\dots,\ \mathrm{f}_\mathrm{p}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3,\dots,\mathrm{x}_\mathrm{n})\Big)$$

и будем считать, что все функции этого вектора необходимо максимизировать. Ограничения задачи объединим во множество $\mathrm{S} = \{\mathrm{g}_1(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3,\dots,\mathrm{x}_\mathrm{n}) \le \mathrm{b}_1, \mathrm{g}_2(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3,\dots,\mathrm{x}_\mathrm{n}) \le \mathrm{b}_2,\dots,\mathrm{g}_\mathrm{m}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3,\dots,\mathrm{x}_\mathrm{n}) \le \mathrm{b}_\mathrm{m}\}$.

Тогда, задачу многокритериальной оптимизации обозначим в виде кортежа: $\mathrm{P} = \langle \mathrm{F}, \mathrm{S} \rangle$. Последняя запись читается таким образом: требуется найти максимум векторной функции F при ограничениях S. Введем в рассмотрение определения. **Парето-множество задачи** $\mathrm{P} = \langle \mathrm{F}, \mathrm{S} \rangle$ обозначим через D_π, а множество ограничений задачи его определяющее – через S_π и назовем **множеством активных ограничений**. Множество ограничений из S, не входящее во множество активных ограничений S_π, назовем **множеством пассивных ограничений** задачи $P = \langle F, S \rangle$ и обозначим через S_p. Таким образом, $S = S_\pi \cup S_p$, а $S_\pi \cap S_p = \emptyset$. **Метод (*M*) решения задачи** $\langle F, S \rangle$ – это отображение пары $\langle F, S \rangle$ в некоторую область (точку) x^* области D_π, т.е. $\langle F, S \rangle \xrightarrow{M} x^* \in D_\pi$ или $M: \langle F, S \rangle \to x^* \in D_\pi$ (для точки x^*). Метод (M) решения задачи ($P = \langle F, S \rangle$) является ***S_p*-инвариантным**, если решение задачи, найденное этим методом, не меняется при изменении элементов множества S_p. При этом считается, что элементы вектора F и множества D_π являются фиксированными и не изменяются при изменении S_p.

Пример. Рассмотрим две задачи линейного программирования.

Задача A. Пусть задан вектор критериев $F_A = \left(f_{1,A}(x_1, x_2), f_{2,A}(x_1, x_2) \right) = (1000 \cdot x_2,\ 0.1 \cdot x_1)$ и ограничения $S_A = \{g_{1,A}(x_1, x_2) \equiv x_1 + x_2 \le 2,\ g_{2,A}(x_1, x_2) \equiv x_1 - x_2 \ge -1,\ g_{3,A}(x_1, x_2) \equiv x_1 - x_2 \le 1,\ g_{4,A}(x_1, x_2) \equiv x_1 \ge 0,\ g_{5,A}(x_1, x_2) \equiv x_2 \ge 0\}$. Необходимо найти решение этой задачи: $F_A \to \max$ при ограничениях S_A.

Решаем задачу методом нормализации критериев (см. [1]-[4]). Последовательно находим: $f_{1,A}^{max} = 1500$ (достигается в точке (0.5, 1.5); $f_{1,A}^{min} = 0$ (достигается в на отрезке ([0;1], 0); $f_{2,A}^{max} = 0.15$ (достигается в точке (1.5, 0.5); $f_{2,A}^{min} = 0$ (достигается в на отрезке (0, [0;1]). Проводим нормализацию критериев: $\lambda_{1,A}(x_1, x_2) = \tilde{f}_{1,A}(x_1, x_2) = \frac{f_{1,A}(x_1,x_2) - f_{1,A}^{min}}{f_{1,A}^{max} - f_{1,A}^{min}} = \frac{1000 \cdot x_2 - 0}{1500 - 0} = \frac{2}{3} \cdot x_2$, $\lambda_{2,A}(x_1, x_2) = \tilde{f}_{2,A}(x_1, x_2) = \frac{f_{2,A}(x_1,x_2) - f_{2,A}^{min}}{f_{2,A}^{max} - f_{2,A}^{min}} = \frac{0.1 \cdot x_1 - 0}{0.15 - 0} = \frac{2}{3} \cdot x_1$. Находим максиминное решение задачи с нормализованными критериями: $x_A^* = (1,1)$; $\tilde{f}_{1,A}^*(x_{1,A}^*, x_{2,A}^*) = \frac{2}{3}$; $\tilde{f}_{2,A}^*(x_{1,A}^*, x_{2,A}^*) = \frac{2}{3}$; $f_{1,A}^*(x_{1,A}^*, x_{2,A}^*) = 1000$; $f_{2,A}^*(x_{1,A}^*, x_{2,A}^*) = 0.1$. Для задачи A: $S_{\pi,A} = \{g_{1,A}(x_1, x_2) \equiv x_1 + x_2 \le 2,\ g_{2,A}(x_1, x_2) \equiv x_1 - x_2 \ge -1,\ g_{3,A}(x_1, x_2) \equiv x_1 - x_2 \le 1\} = S_{a,A}$ – множество ограничений, определяющих множество Парето; $S_{p,A} = \{ g_{4,A}(x_1, x_2) \equiv x_1 \ge 0,\ g_{5,A}(x_1, x_2) \equiv x_2 \ge 0\}$.

Задача B. Вектор критериев $F_B = \left(f_{1,B}(x_1, x_2), f_{2,B}(x_1, x_2) \right) = (1000 \cdot x_2, 0.1 \cdot x_1) = F_A$, ограничения $S_B = \{g_{1,B}(x_1, x_2) \equiv x_1 + x_2 \le 2,\ g_{2,B}(x_1, x_2) \equiv x_1 - x_2 \ge -1,\ g_{3,B}(x_1, x_2) \equiv x_1 \ge 0,\ g_{4,B}(x_1, x_2) \equiv x_2 \ge 0.5\}$. Решаем задачу методом нормализации критериев. Последовательно находим: $f_{1,B}^{max} = 1500$ (достигается в точке (0.5, 1.5); $f_{1,B}^{min} = 500$ (достигается в на отрезке ([0;1.5], 0.5); $f_{2,B}^{max} = 0.15$ (достигается в точке (1.5, 0.5); $f_{2,B}^{min} = 0$ (достигается в на отрезке (0, [0.5;1]). Проводим нормализацию критериев: $\lambda_{1,B}(x_1,x_2)=\tilde{f}_{1,B}(x_1,x_2)=\frac{f_{1,B}(x_1,x_2)-f_{1,B}^{min}}{f_{1,B}^{max}-f_{1,B}^{min}}=\frac{1000\cdot x_2-500}{1500-500}=x_2-0.5$, $\lambda_{2,B}(x_1,x_2)=\tilde{f}_{2,B}(x_1,x_2)=\frac{f_{2,B}(x_1,x_2)-f_{2,B}^{min}}{f_{2,B}^{max}-f_{2,B}^{min}}=\frac{0.1\cdot x_1-0}{0.15-0}=\frac{2}{3}\cdot x_1$. Находим максиминное решение задачи с нормализованными критериями: $x_B^*=(0.9,1.1)$; $\tilde{f}_{1,B}^*\left(x_{1,B}^*,x_{2,B}^*\right)=0.6$; $\tilde{f}_{2,B}^*\left(x_{1,B}^*,x_{2,B}^*\right)=0.6$; $f_{1,B}^*\left(x_{1,B}^*,x_{2,B}^*\right)=1100$; $f_{2,B}^*\left(x_{1,B}^*,x_{2,B}^*\right)=0.09$. Для задачи B: $S_{\pi,B}=\{g_{1,B}(x_1,x_2)\equiv x_1+x_2\leq 2,\ g_{2,B}(x_1,x_2)\equiv x_1-x_2\geq -1,\ g_{4,B}(x_1,x_2)\equiv x_2\geq 0.5\}$=$S_{a,B}$ – множество ограничений, определяющих множество Парето; $S_{p,B}=\{\,g_{3,B}(x_1,x_2)\equiv x_1\geq 0\}$. Заметим, что множества Парето для задач A и B совпадают: $D_{\pi,A}=D_{\pi,B}$.

Замечание 1. Решение задачи A изменилось только за счет изменения множества пассивных ограничений задачи $S_{p,A}$ ($S_{p,A}=\{\,g_{4,A}(x_1,x_2)\equiv x_1\geq 0,\ g_{5,A}(x_1,x_2)\equiv x_2\geq 0\}$, $S_{p,B}=\{\,g_{3,B}(x_1,x_2)\equiv x_1\geq 0\}$).

Замечание 2. За счет изменения множества $S_{p,A}$ произошли изменения в уступках по критериям (со значений (33.33%; 33.33%) для задачи A, на значения (26.66%; 40%) для задачи B).

Здесь уступки по критериям найдены следующим образом:

- для задачи A: $\Delta f_{1,A}=f_{1,A}^{max}-f_{1,A}^*\left(x_{1,A}^*,x_{2,A}^*\right)=1500-1000=500$; относительная уступка в процентах $\Delta f_{1,A}/f_{1,A}^{max}\cdot 100\%=500/1500\cdot 100\%=33.(3)\%$; аналогично для второго критерия - $\Delta f_{2,A}=f_{2,A}^{max}-f_{2,A}^*\left(x_{1,A}^*,x_{2,A}^*\right)=0.15-0.1=0.05$; относительная уступка в процентах для второго критерия $\Delta f_{2,A}/f_{2,A}^{max}\cdot 100\%=0.05/0.15\cdot 100\%=33.(3)\%$;
- для задачи B: $\Delta f_{1,B}=f_{1,B}^{max}-f_{1,B}^*\left(x_{1,B}^*,x_{2,B}^*\right)=1500-1100=400$; относительная уступка в процентах $\Delta f_{1,B}/f_{1,B}^{max}\cdot 100\%=400/1500\cdot 100\%=26.(6)\%$; аналогично для второго критерия $\Delta f_{2,B}=f_{2,B}^{max}-f_{2,B}^*\left(x_{1,B}^*,x_{2,B}^*\right)=0.15-0.09=0.06$; относительная уступка в процентах для второго критерия $\Delta f_{2,B}/f_{2,B}^{max}\cdot 100\%=0.06/0.15\cdot 100\%=40\%$.

Замечание 3. Свойство независимости решений многокритериальных задач, решаемых методом M, от изменения множества их пассивных ограничений S_p может быть названо S_p-инвариантностью (или S_p-устойчивостью) метода M.

Замечание 4. Метод нормализации критериев (см. [1]-[4]) не является S_p-инвариантным. Отметим, что большинство методов, предназначенных для решения многокритериальных задач оптимизации, являются S_p-инвариантными.

Литература

1. Машунин Ю.К. Методы и модели векторной оптимизации. – М.: Наука, 1986. – 140 с.
2. Кириллов Ю.В., Назимко Е.Н. Многокритериальная модель оптимизации структуры капитала// Экономический анализ: теория и практика, 2011, № 32 (239), С. 57–63.
3. Кириллов Ю.В., Назимко Е.Н. Многокритериальная задача оптимизации структуры капитала и ее решение в системе Maple// Экономика и менеджмент систем управления, 2013, т. 8, № 2.1, С. 149-160.
4. Кириллов Ю.В., Досужева Е.Е. Многокритериальная экономико-математическая модель оценки коммерческой эффективности инвестирования// Финансовая аналитика: Проблемы и решения, 2013, № 32, С. 18-24.
5. Список трудов [Электронный ресурс]. URL: https://sites.google.com/site/anatolynaumov2011/home/spisok-trudov-list-of-papers (дата обращения: 23.10.2013).