SECTION 2. Applied mathematics. Mathematical modeling.

Sagat Zhunisbekov
doctor of technical Sciences, Professor,
academician of the National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan, rector
Taraz technical Institute, Kazakhstan
tar-ti@mail.ru
Nurlan Darkhanuly Markhabatov
student 3 courses of speciality Mathematics
Taraz State University named after M.Kh.Dulaty

Alexandr Nikolayevich Shevtsov
candidate of technical Sciences, President of International Academy
International Academy of Theoretical & Applied Sciences, (USA, Sweden, Kazakhstan)
Shev_AlexXXXX@mail.ru

MODELING AND PROGRAMMING IN MATHCAD SUSTAINABILITY AND SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract: *This article discusses a number of points related to the numerical solution of differential equations of the second order, and the study of their stability in MathCad.*

Key words: *stability, differential equation, second order.*

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОГРАМИРОВАНИЕ В MATHCAD УСТОЙЧИВОСТИ И РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация: *В данной статье рассматривается ряд моментов, связанных с процессом численного решения дифференциальных уравнений второго порядка и исследования их устойчивости в MathCad.*

Ключевые слова: *устойчивость, дифференциальное уравнение, второй порядок.*

Исследованию решений параболлических уравнений посвященны труды многих ученых: Киреев В.И., Пантелеев А.В., Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л., Рихтмайер Р.Д., Вержбицкий В.М., Демидович Б.П., Марон И.А., Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я., Кабдыкайыр К., Плис А.И., Сливина Н.А., Такабаев М.К. и многих других [1-4]. Между тем при попытке численного решения и построения компьютерной модели расчета у студентов возникает ряд проблем. Использование и применение на занятиях компьютерных программ, таких как Maple, MathCad, MatLab и др. с одной стороны казалось бы должно способствовать пониманию дисциплины. Но на практике обнаруживается другая тенденция. Недостаточно просто изучить материал и обзорные лабораторные по данным компьютерным программам и общие методы решения примеров. Необходимо более тщательное и углубленное изучение по каждой отдельной теме дисциплины, и даже по каждому отдельному примеру.

Рассморим решение дифференциального уравнения параболического типа на множестве R^2, где $D=(0,T^*)\times(0,l)$ в операторном виде [1]:

$$Lu = f\ ,\quad (t,x)\in D, \tag{1}$$

$$lu = r\ ,\quad (t,x)\in \partial D, \tag{2}$$

$$D_{h\tau} = \{(t_k,x_n):\quad 1\le k\le M-1, 1\le n\le N-1\} \tag{3}$$

$$\tau = T^*/M\ ,\quad h = l/N \qquad \tau_k = t_{k+1}-t_k\ ,\qquad k=0,\dots,M-1,$$

$$h_n = x_{n+1}-x_n\ ,\qquad n=0,\dots,N-1. \tag{4}$$

$$u^{h\tau} = \begin{pmatrix} u_0^0 & u_1^0 & u_2^0 & \dots & \dots & u_N^0 \\ u_0^1 & u_1^1 & u_2^1 & \dots & \dots & u_N^1 \\ u_0^2 & u_1^2 & u_2^2 & \dots & \dots & u_N^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_0^M & u_1^M & u_2^M & \dots & \dots & u_N^M \end{pmatrix} \tag{5}$$

Расписывая (1-5) в конечных разностях получим [1]:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x), \quad 0 < t < T^*, \quad 0 < x < l, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} u(0,x) &= \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \\ u(t,0) &= \mu(t), \quad 0 \le t \le T^*, \\ u(t,l) &= \nu(t), \quad 0 \le t \le T^*. \end{aligned} \tag{7}$$

$$\frac{y_n^{k+1} - y_n^k}{\tau} = a^2\theta(\Lambda y^{k+1})_n + a^2(1-\theta)(\Lambda y^k)_n + g_n^k, \tag{8}$$

$$k = 0,\dots, M-1, \quad n = 1,\dots, N-1,$$

$$y_n^0 = \varphi_n \equiv \varphi(x_n), \quad n = 0,\dots, N, \tag{9}$$

$$y_0^k = \mu^k \equiv \mu(t_k), \quad k = 0,\dots, M, \tag{10}$$

$$y_N^k = \nu^k \equiv \nu(t_k), \quad k = 0,\dots, M. \tag{11}$$

где

$$\left(\Lambda y^k\right)_n \equiv \frac{y_{n-1}^k - 2y_n^k + y_{n+1}^k}{h^2}, \quad \left(\Lambda y^k\right)_n \equiv \frac{y_{n-1}^{k+1} - 2y_n^{k+1} + y_{n+1}^{k+1}}{h^2}. \tag{12}$$

Причем возможно использование нескольких шаблонов:

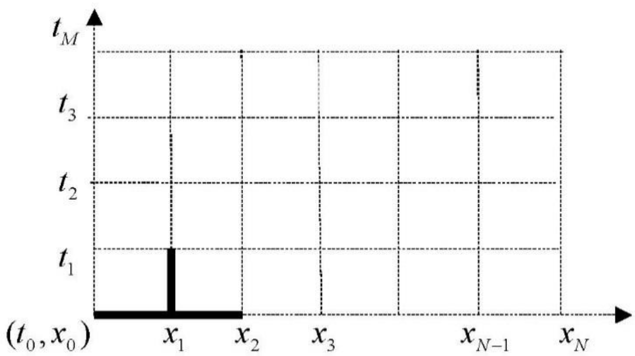

Рисунок 1 – Шаблон при $k = 0$, $n = 1$ для y_1^1.

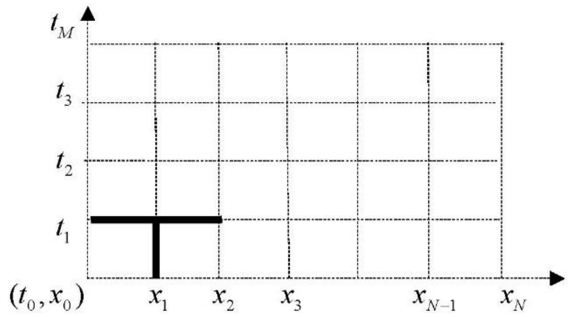

Рисунок 2 - Шаблон при $k = 0$, $n = 1$ **для** y_1^1, y_2^1 .

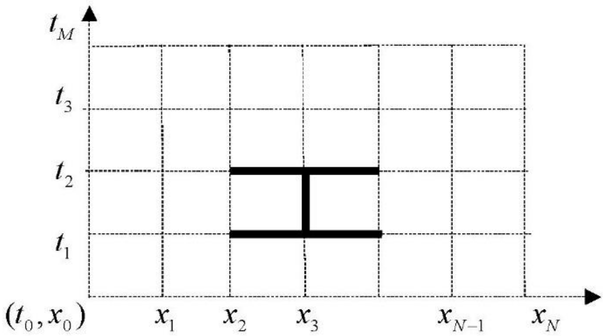

Рисунок 3 - Шаблон при $k = 1$, $n = 3$ **для** y_2^2, y_3^2, y_4^2 .

$N := 50$ $\quad M := 50$ $\quad L := 1$ $\quad Tz := 1$

$k := 0, 1 .. M - 1$ $\quad ta := \frac{Tz}{M}$ $\quad h := \frac{1}{N}$

$n := 1, 2 .. N - 1$

$ta = 0.02$ $\quad h = 0.02$

$t_k := k \cdot ta$ $\quad x_n := n \cdot h$

k =	n =	t =	x =
0	1	0	0
1	2	0.02	0.02
2	3	0.04	0.04
3	4	0.06	0.06
4	5	0.08	0.08
5	6	0.1	0.1
6	7	0.12	0.12
7	8	0.14	0.14
8	9	0.16	0.16
9	10	0.18	0.18
10	11	0.2	0.2
11	12	0.22	0.22
12	13	0.24	0.24
13	14	0.26	0.26
14	15	0.28	0.28
...	...	...	...

Рисунок 4 – Задание начальных условий, шага расчетной сетки.

$e = 2.718 \quad pi := 3.141592653589793 \qquad p := 1$

$a := 0.41$

$f(t,x) := \left[1 + (a)^2 \cdot pi^2\right] e^t \cdot \sin(pi \cdot x)$

$g_{n,k} := f(t_k, x_n) \qquad teta := \left(0.5 - \frac{h^2}{12 \cdot ta \cdot a^2}\right) \qquad teta = 0.49$

g =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.167	0.17	0.174	0.177	0.181	0.185	0.188	0.192	0.196
2	0.333	0.34	0.347	0.354	0.361	0.368	0.376	0.383	0.391
3	0.498	0.508	0.519	0.529	0.54	0.551	0.562	0.573	0.585
4	0.661	0.675	0.688	0.702	0.716	0.731	0.746	0.761	0.776
5	0.822	0.838	0.855	0.873	0.89	0.908	0.926	0.945	0.964
6	0.979	0.999	1.019	1.039	1.06	1.082	1.104	1.126	1.149
7	1.132	1.155	1.178	1.202	1.226	1.251	1.277	1.302	1.329
8	1.281	1.307	1.333	1.36	1.388	1.416	1.444	1.474	1.503
9	1.425	1.454	1.483	1.513	1.543	1.575	1.606	1.639	1.672
10	1.563	1.595	1.627	1.66	1.693	1.727	1.762	1.798	1.834
11	1.695	1.729	1.764	1.8	1.836	1.873	1.911	1.95	1.989
12	1.82	1.857	1.895	1.933	1.972	2.012	2.052	2.094	2.136
13	1.938	1.978	2.017	2.058	2.1	2.142	2.186	2.23	2.275
14	2.049	2.09	2.132	2.176	2.22	2.264	2.31	2.357	2.404
15	2.151	2.195	2.239	2.284	2.33	2.377	2.426	2.475	...

Рисунок 5 – Задание и расчет $f(t,x)$ в (6).

$y_{n+1,0} := \sin(pi \cdot x_n) \qquad y_{0,k} := 0 \qquad y_{1,k} := 0$

$$y_{n,k+1} := y_{n,k} + ta \cdot (g_{n,k}) + ta \cdot a^2 \cdot \frac{(y_{n-1,k} - 2y_{n,k} + y_{n+1,k})}{h^2}$$

Рисунок 6 – Задание расчетной схемы.

$$u1(t1, x1) := \sin[p \cdot (t1 + 1)] \cdot \left(\cos(x1) + \cos(100 \cdot x1) + \cos\left(10 \cdot \frac{t1}{ta} \cdot x1\right)\right)$$

$$u_{k,n} := u1(t_k, x_n)$$

u =

	0	1	2	3	4
0	0	1.333	1.132	2.489	1.558
1	0	1.332	1.079	2.372	1.319
2	0	1.298	0.899	2.001	0.709
3	0	1.229	0.618	1.51	0.099
4	0	1.129	0.279	1.077	-0.13
5	0	1.002	-0.063	0.863	0.176
6	0	0.852	-0.353	0.956	0.845
7	0	0.685	-0.542	1.334	1.478
8	0	0.508	-0.598	1.876	1.691
9	0	0.33	-0.51	2.398	1.35
10	0	0.156	-0.287	2.72	0.658
11	0	$-4.553 \cdot 10^{-3}$	0.036	2.731	0.038
12	0	-0.145	0.41	2.428	-0.126
13	0	-0.26	0.775	1.916	0.276
14	0	-0.344	1.074	1.379	1.01
15	0	-0.392	1.258	1.009	...

Рисунок 7 – Быстроменяющаяся функция, определяющая точное решение.

y =

0	0	0	0	0
0	0.531	-8.393	132.7	$-2.098 \cdot 10^{3}$
0.063	0.067	3.405	-124.378	$3.082 \cdot 10^{3}$
0.125	0.131	-1.497	52.299	$-1.872 \cdot 10^{3}$
0.187	0.194	-1.958	18.382	148.973
0.249	0.257	-2.411	21.675	-188.157
0.309	0.318	-2.854	24.882	-211.183
0.368	0.379	-3.286	27.99	-233.376
0.426	0.437	-3.705	30.989	-254.647
0.482	0.494	-4.11	33.865	-274.914
0.536	0.549	-4.498	36.608	-294.096
0.588	0.602	-4.869	39.206	-312.117
0.637	0.653	-5.22	41.649	-328.906
0.685	0.701	-5.551	43.928	-344.398
0.729	0.746	-5.86	46.033	-358.53
0.771	0.788	-6.146	47.957	...

Рисунок 8 – Численные значения функции.

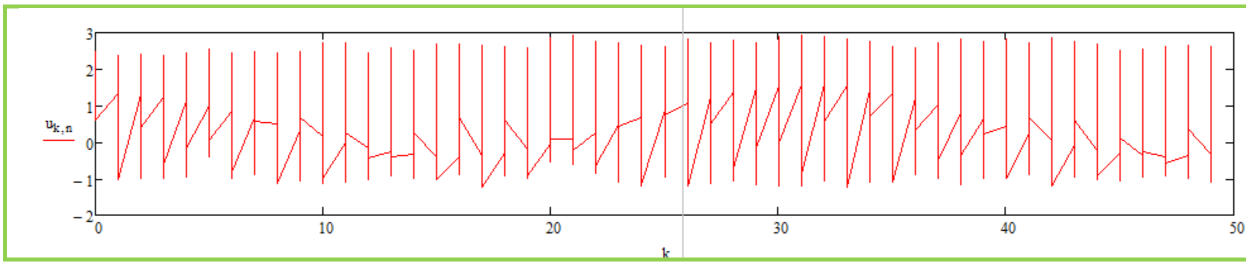

Рисунок 9 – Зависимость точного решения от к.

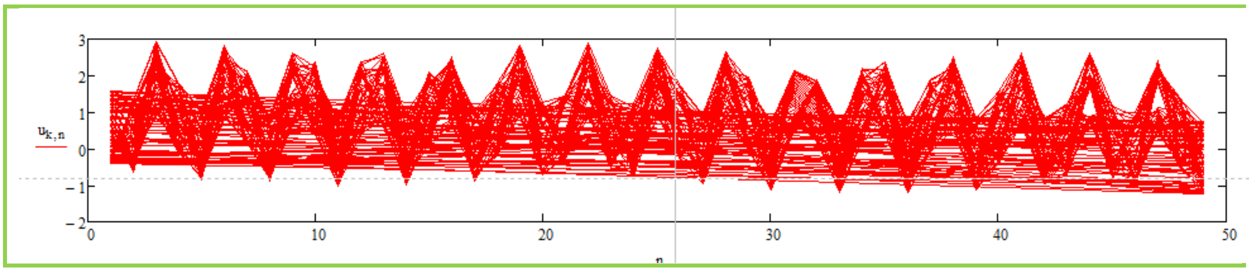

Рисунок 10 – Зависимость точного решения от n.

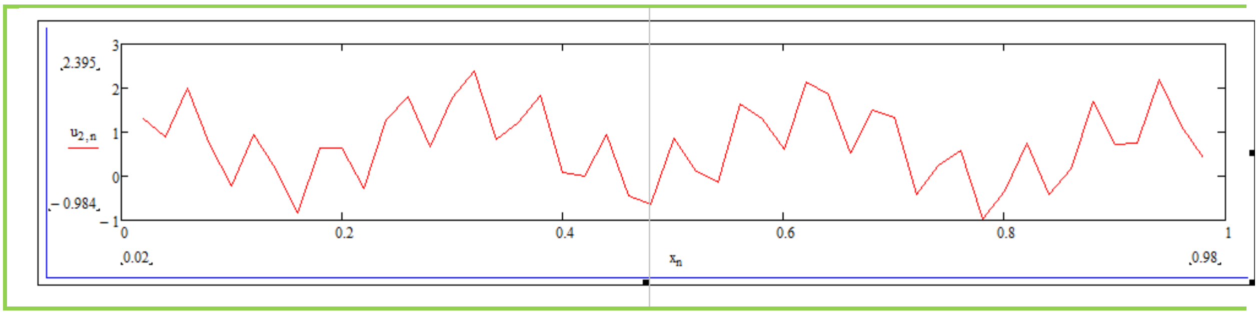

Рисунок 11 – Частное решение функции u от x.

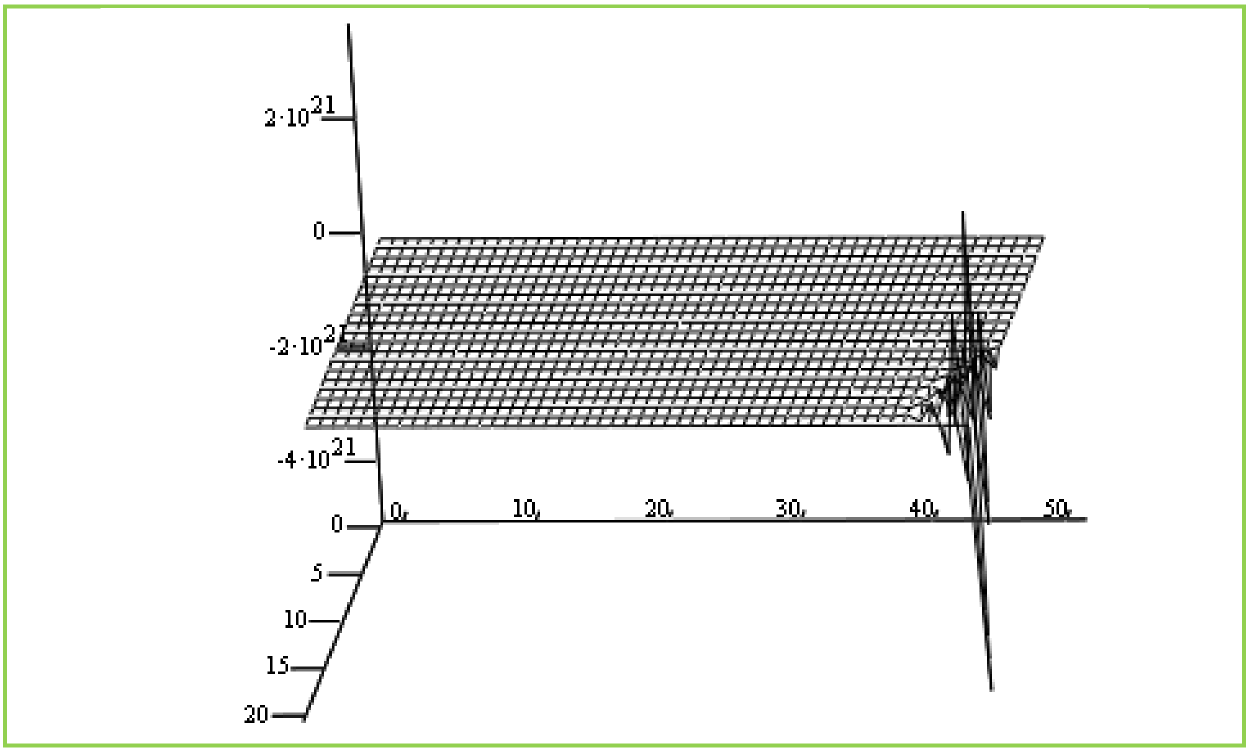

Рисунок 12 – Возмущения численного решения.

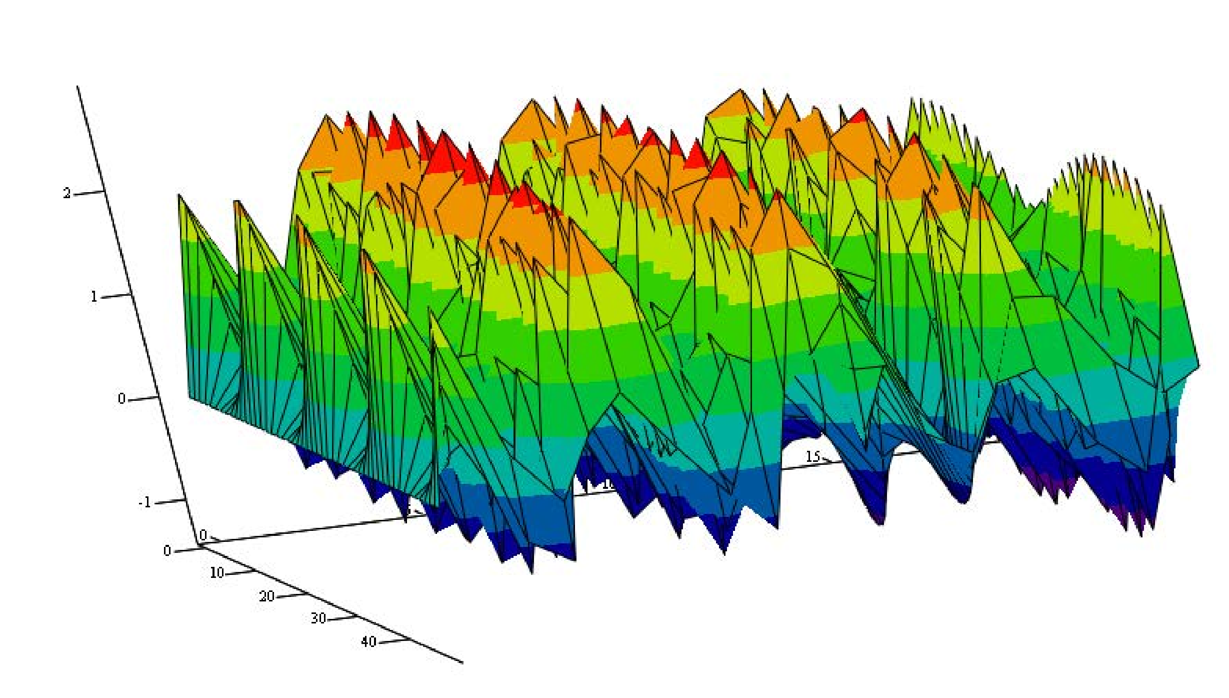

Рисунок 13 – Численное решение по расчетной схеме рис.1.

В настоящее время процесс обучения неразрывно связан с тремя аспектами: построение аналитического и численного решения, а также его компьютерная реализация. При этом если первые два студент изучает на основе известных моделей и примеров, то последний аспект недостаточно описан и сказывается нехватка сборников лабораторных работ. В математике назрела необходимость разработки не обзорных лабораторных работ, а углубленных в узкую специализацию и направленных на проведение исследований.

References:

1. Абиев Н.А. МАТЕМАТИКАЛЫҚ ФИЗИКА ЕСЕПТЕРІН ШЕШУДІҢ АЙЫРЫМДЫҚ СХЕМАЛАРЫ. – Тараз, 2012. -252с.
2. Численные методы решения дифференциальных уравнений параболического типа. URL: http://knowledge.allbest.ru/mathematics/2c0b65625b3bc68b5d43b89421206c36_0.html (Дата доступа 24.03.2014).
3. ТЕПЛОМАССООБМЕН. URL: http://stringer46.narod.ru/HeatConductivity0.htm (Дата доступа 24.03.2014).
4. Численные методы решения дифференциальных уравнений параболического типа. URL: http://www.bibliofond.ru/view.aspx?id=602539 (Дата доступа 24.03.2014).
5. Дифференциальное уравнение теплопроводности. URL: http://www.fast-const.ru/articles.php?article_id=21 (Дата доступа 24.03.2014).
6. Конечно-разностный метод решения для уравнений параболического типа. URL: http://www.bestreferat.ru/referat-213690.html (Дата доступа 24.03.2014).
7. Разностные схемы: явная и неявная схемы. URL: http://5fan.ru/wievjob.php?id=46738 (Дата доступа 24.03.2014).
8. Решение дифференциальных уравнений в частных производных. URL: http://teacher.ucoz.net/Lection/Scilab/glava_12.pdf (Дата доступа 24.03.2014).
9. Решение двумерных дифференциальных уравнений параболического типа. URL: http://ikt.muctr.ru/html2/7/lek7_10.html (Дата доступа 24.03.2014).
10. Дифференциальные уравнения в частных производных. URL: http://el1504.narod.ru/Charter13/1.htm (Дата доступа 24.03.2014).