Doi: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2015 **Issue:** 02 **Volume:** 22

Published: 28.02.2015 **http://www.T-Science.org**

SECTION 1. Theoretical research in mathematics.

Gulzhan Kadirhanovna Rahimova
candidate of physico-mathematical Sciences,
senior lecturer, Taraz state University named after
M.H. Dulati, Kazakhstan
rahimovagk@mail.ru

Ainur Tursynhanovna Tolkynbayeva
senior lecturer
Taraz state University named after M.H. Dulati,
Kazakhstan

Bereke Mukasheva
student
Taraz state University named after M.H. Dulati,
Kazakhstan

SMOOTHNESS AND EXISTENCE OF SOLUTIONS OF SOME NONLINEAR DEGENERATE EQUATIONS

***Abstract**: In this paper there is investigated the existence, smoothness and approximation properties of a solutions of a class of degenerate loaded equations of non-classical type.*

***Key words**: non-classical equation, nonlinear equation, boundary value problem, the smoothness.*
***Language**: Russian*
***Citation**: Rahimova GK, Tolkynbayeva AT, Mukasheva B (2015) SMOOTHNESS AND EXISTENCE OF SOLUTIONS OF SOME NONLINEAR DEGENERATE EQUATIONS. ISJ Theoretical & Applied Science 02 (22): 82-87. doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.02.22.14

УДК 517. 946

О ГЛАДКОСТИ И СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ

***Аннотация**: В статье исследованы существование, гладкость и аппроксимативные свойства решений одного класса вырождающихся нелинейных уравнений неклассического типа.*

***Ключевые слова**: неклассическое уравнение, нелинейное уравнение, краевая задача, гладкость.*

1. Введение и формулировка основных условий.

В течений нескольких десятилетий общая теория краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений интенсивно изучается в связи с их большим значением для приложений (например, в газовой динамике). Несмотря на это, ещё нет окончательного ответа на вопросы, рассматриваемые нами: теоремы о гладкости решений, оценки промежуточных производных решений с различными весовыми функциями.

В настоящей работе получены следующие результаты: предельная гладкость решений одного класса вырождающихся уравнений в случае неограниченной области; необходимые и достаточные условия для оценки производных решений с различными весовыми функциями. Эти результаты дополняют работы С.М.Никольского [1], П.И.Лизоркина [2], М.И.Вишика [3], Т.Ш.Кальменова, М.Отелбаева [4], М.Б.Муратбекова [5].

В $L_2(\Omega)$ рассматривается следующая задача:

$$Lu = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{k=0}^{s}(-1)^k R_k(x,y,u)\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{m}(-1)^k B_k(x,y,u)\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}} = f \in L_2(\Omega), \quad (1)$$

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right|_{x=2\pi}, \qquad i = 0,1,2,\ldots,2s, \quad s \ge m, \quad (2)$$

$$u(x,0)=u(x,1)=0, \tag{3}$$

где $f\in L_2(\Omega)$, $\Omega=\{(x,y):0<x<2\pi,\quad 0<y<1\}$.

В дальнейшем считаем, что функции $R_k(x,y,z)\ (k=0,1,...,s)$, $B_k(x,y,z)\ (k=0,1,...,m)$ кусочно-непрерывны и ограниченны по заданным аргументам и удовлетворяют условиям:

а) $C^{-1}\varphi_k(y)\le R_k(x,y,z)\le C\varphi_k(y),\quad x\in[0,2\pi],\quad y\in[0,1],\quad |z|\in[0,A]$,

A- любое фиксированное число ;

б) $C^{-1}\psi_k(y)\le B_k(x,y,z)\le C\psi_k(y),\quad x\in[0,2\pi],\quad y\in[0,1],\quad |z|\in[0,A]$,

где функции φ_k *и* ψ_k *удовлетворяют соответственно условиям* $в)-г)$.

в) $R_k(y)\ge 0(k=1,2,....,s), B_k(y)\ge 0(k=2,...,m), R_0(y)\ge\delta_0>0, B_0(y)$ *и* $B_1(y)\ge\delta>0.$

г) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{R_k(2y)}{R_k(y)}<\infty\quad (k=1,2,...,s);\qquad \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{B_k(2y)}{B_k(y)}<\infty\quad (k=1,2,...,m).$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:* $а)-б)$ *Тогда существует решение задачи (1)-(3), и для него справедлива оценка:*

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})}\le C_0\|f\|_2,\quad (\|u\|_{W_2^2(\Omega)}\le C\|f\|_2), \tag{4}$$

где C и $C_0>0$ *- постоянные числа.*

2. Вспомогательные оценки

Прежде, чем доказать эту теорему, приводим несколько вспомогательных предложений.

Рассмотрим задачу:

$$L_v u=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\sum_{k=0}^{s}(-1)^k R_k(x,y,v)\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}+\sum_{k=0}^{m}(-1)^k B_k(x,y,v)\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}=f\in L_2(\Omega), \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right|_{x=2\pi},\qquad i=0,1,2,...,2s,\qquad s\ge m, \tag{6}$$

$$u(x,0)=u(x,1)=0, \tag{7}$$

Лемма 2.1 *Пусть* $v\in C(\overline{\Omega})$ *и выполнено условие* $а)-б)$. *Тогда для любой правой части f из* $L_2(\Omega)$ *существует, притом единственное решение задачи (5)-(7) и для него справедлива оценка:*

$$\|u(x,y)\|_{C(\overline{\Omega})}\le C\|f\|_2,\quad (\|u\|_{W_2^2(\Omega)}\le C_0\|f\|_2), \tag{8}$$

где C_0*, C>0 не зависит от u, v.*

Доказательство. Положим

$$\tilde{R}_k(y)=R_k(x,y,v),\ (k=0,1,...,s),\qquad \tilde{B}_k(y)=B_k(x,y,v),\ (k=0,1,...,m).$$

Тогда (5)-(7) сводится к задаче (1)-(3), где функции $R_k(y), B_k(y)$ заменены, соответственно, на $\tilde{R}_k(y), \tilde{B}_k(y)$. При этом согласно условию $a)-б)$ для $\tilde{R}_k(y), \tilde{B}_k(y)$ выполняются все условия теоремы [6], откуда вытекает утверждение доказываемой леммы. Таким образом, задача (5)-(7) имеет единственное решение $u = L_v^{-1} f$ удовлетворяющее оценку (8). Очевидно, если $v \in C(\overline{\Omega})$, то $u = L_v^{-1} f \in \tilde{N}(\overline{\Omega})$. Более того, поскольку $u = L_v^{-1} f$ – решение задачи (5)-(7), для произвольной функции $v \in C(\overline{\Omega})$ имеем $L_v^{-1} f \in D(L)$. Поэтому, существование решения краевой задачи (5)-(7) эквивалентно существованию неподвижной точки оператор L_v^{-1} в пространстве $C(\overline{\Omega})$ т.е. существование функции $u \in C(\overline{\Omega})$ такой, что $u = L_u^{-1} f$. При этом $u \in D(L)$, поскольку $L_u^{-1} f \in D(L)$.

Следовательно, задача (5)-(7) имеет решение, если оператор L_v^{-1} имеет неподвижную точку. С этой целью применяем известный принцип Шаудера.

Пусть $\overline{S} = \{v \in C(\overline{\Omega}) : \|v\|_{C(\overline{\Omega})} \le A\}$ – шар в пространстве $C(\overline{\Omega})$ и A- произвольное положительное число.

Лемма 2.2 *Пусть выполнено условие* $a)-б)$. *Тогда оператор* L_v^{-1} *отображает множество* $\overline{S}$ *в себя.*

Доказательство. Доказательство леммы следует из теоремы 2 [6] и леммы 2.1, если в качестве A взять число $C\|f\|_2$ из оценки (8). Пусть $M = \{u \in C(\overline{\Omega}) : u = L_v^{-1} f,\ v \in \overline{S}\}$ – прообраз шара $\overline{S}$.

Лемма 2.3 *Пусть выполнено условие* $a)-б)$. *Тогда оператор* L_v^{-1} *непрерывен.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ и элемент v из множества $\overline{S}$, такие, что $v_n \to v$ в норме пространства $C(\overline{\Omega})$.

Положим $L_v u = f$ и

$$L_{v_n} u = -\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} + \sum_{k=0}^{s} (-1)^k R_k(x,y,v_n) \frac{\partial^{2k+1} u_n}{\partial x^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{m} (-1)^k B_k(x,y,v_n) \frac{\partial^{2k} u_n}{\partial x^{2k}} = f,$$

где $f(x)$ - фиксированный элемент в $L_2(\Omega)$.
Тогда

$$-\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \sum_{k=0}^{s} (-1)^k R_k(x,y,v_n) \frac{\partial^{2k+1} u_n}{\partial x^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{m} (-1)^k B_k(x,y,v_n) \frac{\partial^{2k} u_n}{\partial x^{2k}} - \sum_{k=0}^{s} (-1)^k R_k(x,y,v) \frac{\partial^{2k+1} u}{\partial x^{2k+1}} - \sum_{k=0}^{m} (-1)^k B_k(x,y,v) \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = 0,$$

или

$$-\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\sum_{k=0}^{s}(-1)^k R_k(x,y,v_n)\left(\frac{\partial^{2k+1}u_n}{\partial x^{2k+1}}-\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}\right)+$$
$$+\sum_{k=0}^{m}(-1)^k B_k(x,y,v_n)\left(\frac{\partial^{2k}u_n}{\partial x^{2k}}-\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}\right)=$$
$$=(\sum_{k=0}^{s}(-1)^k[R_k(x,y,v)-R_k(x,y,v_n)])\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}+ \tag{9}$$
$$+(\sum_{k=0}^{m}(-1)^k[B_k(x,y,v)-B_k(x,y,v_n)])\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}\ .$$

Левая часть последнего равенства имеет вид:

$$L_{v_n}(u_n-u)=-\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\sum_{k=0}^{s}(-1)^k R_k(x,y,v_n)\left(\frac{\partial^{2k+1}u_n}{\partial x^{2k+1}}-\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}\right)+$$
$$+\sum_{k=0}^{m}(-1)^k B_k(x,y,v_n)\left(\frac{\partial^{2k}u_n}{\partial x^{2k}}-\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}\right).$$

Отсюда и из (9) находим:

$$L_{v_n}(u_n-u)=(\sum_{k=0}^{s}(-1)^k[R_k(x,y,v)-R_k(x,y,v_n)])\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}+$$
$$+(\sum_{k=0}^{m}(-1)^k[B_k(x,y,v)-B_k(x,y,v_n)])\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}.$$

По предположению, коэффициенты оператора L_{v_n} удовлетворяют условиям теоремы 1 [6-9], следовательно существует обратный оператор

$$u_n-u=L_{v_n}^{-1}\left[(\sum_{k=0}^{s}(-1)^k[R_k(x,y,v)-R_k(x,y,v_n)])\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}+\right.$$
$$\left.+(\sum_{k=0}^{m}(-1)^k[B_k(x,y,v)-B_k(x,y,v_n)])\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}\right].$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n-u\|_{C(\overline{\Omega})}=\lim_{n\to\infty}\left\|L_{v_n}^{-1}\left[(\sum_{k=0}^{s}(-1)^k[R_k(x,y,v)-R_k(x,y,v_n)])\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+(\sum_{k=0}^{m}(-1)^k[B_k(x,y,v)-B_k(x,y,v_n)])\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}\right]\right\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Пользуясь теоремами 1 и 2 [6-9] имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n - u\|_{C(\overline{\Omega})} \le \lim_{n\to\infty}\left\{\|L_{u_n}^{-1}\|_{C(\overline{\Omega})}\right.$$

$$\left[\sum_{k=0}^{s}\left\|(-1)^k[R_k(x,y,v)-R_k(x,y,v_n)]\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}\right\|_2 + \right. \tag{10}$$

$$\left.+\left[\sum_{k=0}^{m}\left\|(-1)^k[B_k(x,y,v)-B_k(x,y,v_n)]\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}\right\|_2\right]\right\}.$$

Из теоремы 1 [6] также следует, что

$$\|L_{v_n}^{-1} f\|_{C(\overline{\Omega})\to C(\overline{\Omega})} \le C\|f\|_2, \tag{11}$$

для всех $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ и v. А из (8) получим оценки:

$$\sum_{k=0}^{s}\left\|(-1)^k[R_k(x,y,v)-R_k(x,y,v_n)]\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}\right\|_2 \to 0 \text{, при } n\to\infty, \tag{12}$$

$$\sum_{k=0}^{m}\left\|(-1)^k[B_k(x,y,v)-B_k(x,y,v_n)]\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}\right\|_2 \to 0 \text{, при } n\to\infty, \tag{13}$$

Учитывая оценки (11)-(13), из неравенства (10) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n - u\|_{C(\overline{\Omega})} \to \infty. \tag{14}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\|v_n - v\|_{C(\overline{\Omega})} \to 0$ при $n\to\infty$.

Неравенство (14) доказывает лемму.

Доказательство теоремы 1. Согласно лемме 2.3 оператор L_v^{-1} вполне непрерывен и переводит шар $\overline{S}$ в себя. Тогда согласно принципу Шаудера оператор L_v^{-1} при фиксированном $f(x)\in L_2(\Omega)$ имеет неподвижную точку в $\overline{S}$. Это означает, что задачи (1)-(3) для любой правой части $f(x)\in L_2(\Omega)$ имеет решение $u(x,y)$, принадлежащее шару $\overline{S}$, причем верна оценка:

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \le C_0\|f\|_2,$$

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)} \le C\|f\|_2,$$

Теорема доказана.

References:

1. Nikol'skiy SM (1979) Variatsionnaya problema dlya uravneniya ellipticheskogo tipa vyrozhdeniem na granitse. Trudy MI AN SSSR, 1979, t.150, pp.212-238.
2. Lizorkin PI, Nikol'skiy SM (1981) Ellipticheskie uravneniya s vyrozhdeniem. Differentsial'nye svoystva resheniy. Dokl. AN SSSR, 1981,t.257, №1, pp.42-45.
3. Vishik MI, Grushin VV (1969) Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy vyrozhdayushchikhsya na granitse oblasti. Matematicheskiy sbornik, 1969, t.80, №4, pp.455-491.
4. Kal'menov TS, Otelbaev M (1977) O gladkosti resheniy odnogo klassa vyrozhdayushchikhsya ellipticheskikh uravneniy. Differentsial'nye uravneniya, 1977, t.13, №7, pp.1244-1255.

5. Muratbekov MB (1981) Koertsitivnye otsenki dlya odnogo differentsial'nogo operatora vysokogo poryadka. Differentsial'nye uravneniya, 1981, t.17, №5, pp.893-901.
6. Rakhimova GK (2006) Apriornye otsenki resheniy neklasicheskogo uravneniya tret'ego poryadka v neogranichennoy oblasti . Tezisy dokladov mezhdunarodnoy 11-oy mezhvuzovskoy konferentsii po matematike i mekhanike. - Astana, 2006.
7. Muratbekov MB (1981) O gladkosti resheniy odnogo klassa neravnomerno vyrozhdayushchikhsya ellipticheskikh uravneniy. Izvestiya AN Kaz SSR. Ser.fiz-mat. 1981. №5. pp.71-73.
8. Muratbekov MB (1981) O gladkosti resheniy odnogo klassa neravnomerno vyrozhdayushchikhsya ellipticheskikh uravneniy vysokogo poryadka. Korrektnye kraevye zadachi dlya neklassicheskikh uravneniy matematicheskoy fiziki. Novosibirsk. 1981. pp.144-146.
9. Muratbekov MB (1982) O gladkosti resheniy vyrozhdayushchikhsya ellipticheskikh uravneniy i odnomernogo nelineynogo statsionarnogo uravneniya Shredingera. Avtoreferat diss. kand. Almaty. 1982. pp.16.
10. Muratbekov MB, Muratbekov MM, Ospanov KN (2006) Ob approksimativnykh svoystvakh resheniya nelineynogo uravneniya smeshannogo tipa. Fundamental'naya i prikladnaya matematika. MGU. 2006. T.12. №5. pp.95-107.
11. Muratbekov MB, Muratbekov MM (2007) Otsenki spektra odnogo klassa operatorov smeshannogo tipa. Differentsial'nye uravneniya. RAN. 2007. T.43. №1. pp.135-138.
12. Mikhaylov VP (1976) Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh. Moscow. Nauka. 1976.
13. Muratbekov MB (1991) Razdelimost' i otsenki poperechnikov mnozhestv, svyazannykh s oblast'yu opredeleniya nelineynogo operatora Shredingera. Differentsial'nye uravneniya. 1991. T.27. №6. pp. 1034 -1042.
14. Mynbaev KT, Otelbaev M (1988) Vesovye funktsional'nye prostranstva i spektr differentsial'nykh operatorov. Differentsial'nye uravneniya. Moscow. Nauka. 1988. pp. 286.
15. Muratbekov MB (2006) Razdelimost' i spektr differentsial'nykh operatorov smeshannogo tipa. –Taraz: -2006. -pp.163.