SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science
p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)
Year: 2015 Issue: 04 Volume: 24
Published: 30.04.2015 http://T-Science.org

Alexandr Nikolayevich Shevtsov
candidate of technical sciences,
member of PILA (USA),
Department of «Mathematics»,
Taraz state University M.Kh. Dulati, Kazakhstan
Shev_AlexXXXX@mail.ru

Meyrbek Inkarbekuly Azbergen
Professor, candidate of technical Sciences,
Taraz state University M.Kh.Dulati, Kazakhstan
azmeirbek@mail.ru

SECTION 2. Applied mathematics. Mathematical modeling.

SOME SOLUTIONS OF DYNAMICAL SYSTEMS ON THE SPHERE

Abstract: *In article decisions are modeled planar dynamical systems on the sphere, with different coefficients, forming a more complex topological structure.*

Key words: *dynamic system, sphere, vector field, modeling.*
Language: *Russian*
Citation: Shevtsov AN, Azbergen MI (2015) SOME SOLUTIONS OF DYNAMICAL SYSTEMS ON THE SPHERE. ISJ Theoretical & Applied Science 04 (24): 188-194.
Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS*04(24)34 ***Doi***: crossref http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.04.24.34

О НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА СФЕРЕ

Аннотация: *В статье моделируются некоторые решения плоских динамических систем проектируемых на сферу, при различных коэффициентах, образуя более сложную топологическую структуру.*

Ключевые слова: *динамическая система, сфера, векторное поле, моделирование.*

Динамические системы активно используются, в связи с тем, что они сохраняют все существенные черты плоских динамических систем, и при этом освобождены от некоторых свойств вносящих осложнения, т.к. рассматриваемая плоская открытая область некомпактна [1-9].

Определение 1. На сфере s задана динамическая система класса C_k , если при некотором координатном покрытии сферы класса C_{k+1} выполняется следующее:

1. В каждой области g_i покрытия задана динамическая система

$$\frac{du_i}{dt}=U_i\left(u_i,v_i\right),\quad \frac{dv_i}{dt}=V_i\left(u_i,v_i\right), \tag{1}$$

где u_i,v_i - локальные координаты, введенные в области g_i .

2. В точках, общих двум областям покрытия g и $\tilde{g}$, динамические системы переходят друг в друга путем преобразования координат, переводящего одну координатную систему в другую. Если

$$\frac{d\tilde{u}}{dt}=\tilde{U}\left(\tilde{u},\tilde{v}\right),\quad \frac{d\tilde{v}}{dt}=\tilde{V}\left(\tilde{u},\tilde{v}\right), \tag{2}$$

Динамическая система (2) задана в области $\tilde{g}$, тогда в области ω эта система получается из системы (3), заданной в области g , путем преобразования координат [1-3,5].

$$\begin{cases} x=\varphi_i\left(u_i,v_i\right),\\ y=\psi_i\left(u_i,v_i\right),\\ z=\chi_i\left(u_i,v_i\right), \end{cases} \tag{3}$$

Таким образом пулучим:

$$\begin{aligned} \tilde{U}\left(\tilde{u},\tilde{v}\right)&=\frac{\partial f}{\partial u}U\left(\tilde{f},\tilde{g}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}V\left(\tilde{f},\tilde{g}\right),\\ \tilde{V}\left(\tilde{u},\tilde{v}\right)&=\frac{\partial h}{\partial u}U\left(\tilde{f},\tilde{g}\right)+\frac{\partial h}{\partial v}V\left(\tilde{f},\tilde{g}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Определение 2. Система непрерывных функций $x=f_1(t), y=f_2(t), z=f_3(t)$ или эквивалентная им непрерывная вектор-функция $r=F(t)$, определенная на интервале (α,β) значений t , называется решением динамической системы D на сфере, если:

1. В каждой области g покрытия сферы

$$F(t)\equiv\Phi\big(u(t),v(t)\big), \tag{5}$$

где $r=\Phi(u,v)$ - вектор-функция, дающая при выбранных координатах параметрические уравнения части g сферы, а функции $u(t)$ и $v(t)$ удовлетворяют в соответствующей области g системе, так что

$$\frac{du(t)}{dt}=U\left(u(t),v(t)\right),\quad \frac{dv(t)}{dt}=V\left(u(t),v(t)\right),\qquad (6)$$

2. Решение рассматривается на максимальном возможном интервале значений t.

Рассмотрим динамическую систему заданную уравнениями

$$\frac{du}{dt}=\frac{u}{1+u^2+v^2},\quad \frac{dv}{dt}=\frac{v}{1+u^2+v^2},\qquad (7)$$

в области g (рис.1), и уравнениями

$$\frac{d\tilde{u}}{dt}=\frac{-\tilde{u}\left(\tilde{u}^2+\tilde{v}^2\right)}{16+\tilde{u}^2+\tilde{v}^2},\quad \frac{d\tilde{v}}{dt}=\frac{-\tilde{v}\left(\tilde{u}^2+\tilde{v}^2\right)}{16+\tilde{u}^2+\tilde{v}^2},\qquad (8)$$

в области $\tilde{g}$ (рис.3).

$$\frac{du}{dt}=\frac{-v+au}{1+u^2+v^2},\quad \frac{dv}{dt}=\frac{u+av}{1+u^2+v^2},\qquad (9)$$

в области g (рис.4), и уравнениями

$$\frac{d\tilde{u}}{dt}=\frac{\left(-\tilde{v}-a\tilde{u}\right)\left(\tilde{u}^2+\tilde{v}^2\right)}{16+\tilde{u}^2+\tilde{v}^2},\quad \frac{d\tilde{v}}{dt}=\frac{\left(\tilde{u}-a\tilde{v}\right)\left(\tilde{u}^2+\tilde{v}^2\right)}{16+\tilde{u}^2+\tilde{v}^2},\qquad (10)$$

в области $\tilde{g}$ (рис.5).

```
restart:
R0 := diff(u(t), t) = u(t)/(1 + (u(t))^2 + (v(t))^2):
R1 := diff(v(t), t) = v(t)/(1 + (u(t))^2 + (v(t))^2):
with(DEtools):
sys := {R0, R1}:
a := 0:
DEplot3d(sys, [u(t), v(t)], t = 0..180, [[u(0) = 2,
  v(0) = 1]], stepsize = 0.1, scene = [t, u(t),
  v(t)], linecolor = cos(t/180));
```

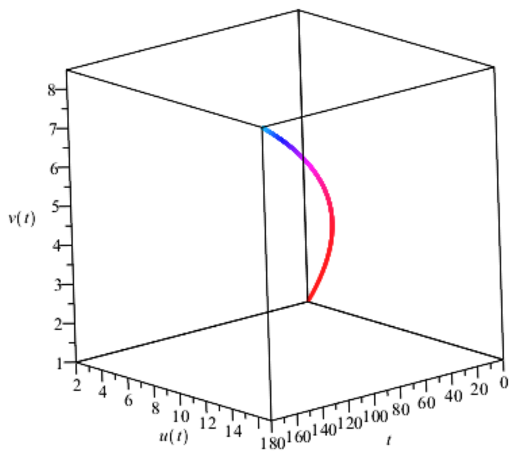


Рисунок 1 – Решение динамической системы (7).

```
restart:
R0 := diff(u(t), t) = -u(t)·(u(t)^2 + v(t)^2)/(16 + (u(t))^2 + (v(t))^2):
R1 := diff(v(t), t) = -v(t)·(u(t)^2 + v(t)^2)/(16 + (u(t))^2 + (v(t))^2):
with(DEtools):
sys := {R0, R1}:
a := 0:
DEplot3d(sys, [u(t), v(t)], t = 0..180, [[u(0) = 2,
  v(0) = 1]], stepsize = 0.1, scene = [t, u(t),
  v(t)], linecolor = cos(t/180));
```

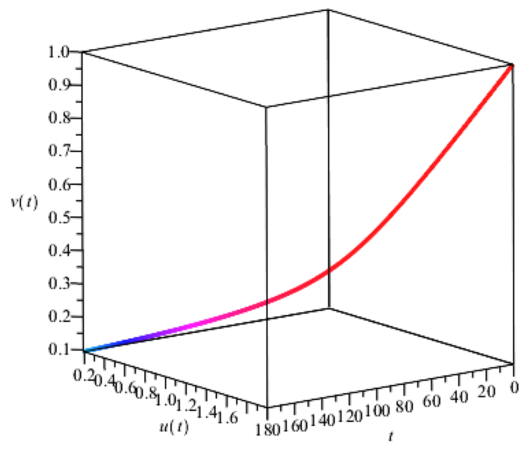


Рисунок 2 – Решение динамической системы (8).

```
restart :
```

$$R0 := diff(u(t), t) = \frac{-v(t) + a \cdot u(t)}{1 + (u(t))^2 + (v(t))^2} :$$

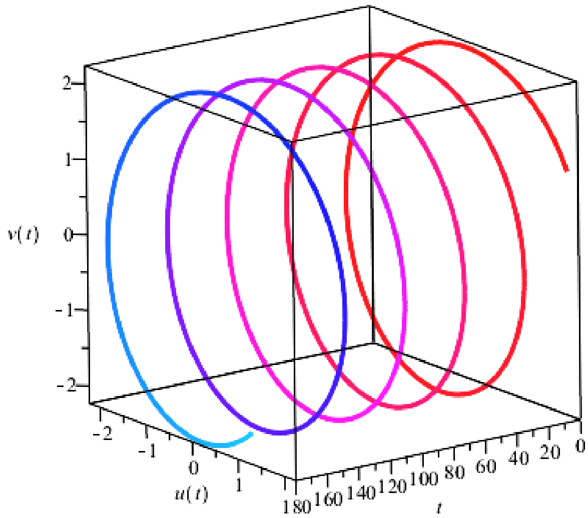
$$R1 := diff(v(t), t) = \frac{u(t) + a \cdot v(t)}{1 + (u(t))^2 + (v(t))^2} :$$

$with(DEtools)$:

$sys := \{R0, R1\}$:

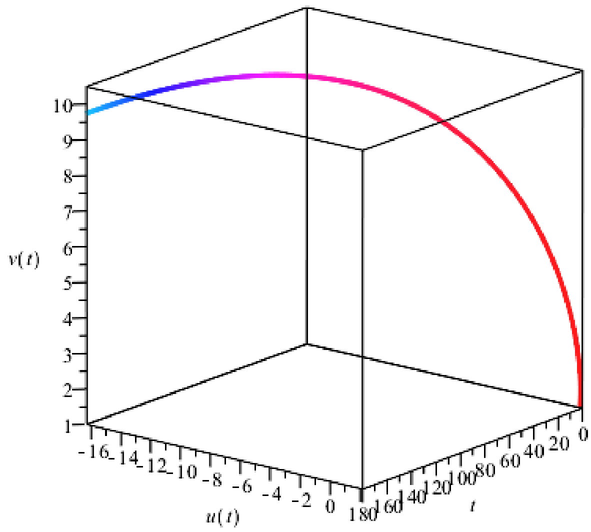
$a := 0$:

$DEplot3d\left(sys, [u(t), v(t)], t = 0..180, [[u(0) = 2, v(0) = 1]], stepsize = 0.1, scene = [t, u(t), v(t)], linecolor = \cos\left(\frac{t}{180}\right)\right);$



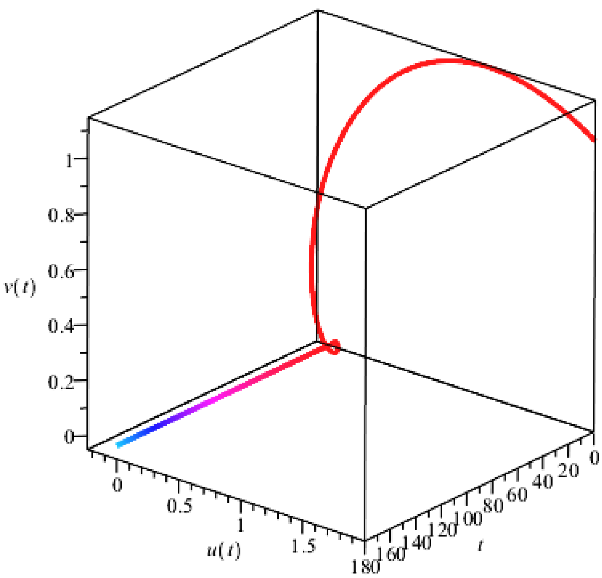
$a := 1$:

$DEplot3d\left(sys, [u(t), v(t)], t = 0..180, [[u(0) = 2, v(0) = 1]], stepsize = 0.1, scene = [t, u(t), v(t)], linecolor = \cos\left(\frac{t}{180}\right)\right);$



$a := -1$:

$DEplot3d\left(sys, [u(t), v(t)], t = 0..180, [[u(0) = 2, v(0) = 1]], stepsize = 0.1, scene = [t, u(t), v(t)], linecolor = \cos\left(\frac{t}{180}\right)\right);$



$a := 10$:

$DEplot3d\left(sys, [u(t), v(t)], t = 0..180, [[u(0) = 2, v(0) = 1]], stepsize = 0.1, scene = [t, u(t), v(t)], linecolor = \cos\left(\frac{t}{180}\right)\right);$

$a := -10$:

$DEplot3d\left(sys, [u(t), v(t)], t = 0..180, [[u(0) = 2, v(0) = 1]], stepsize = 0.1, scene = [t, u(t), v(t)], linecolor = \cos\left(\frac{t}{180}\right)\right);$

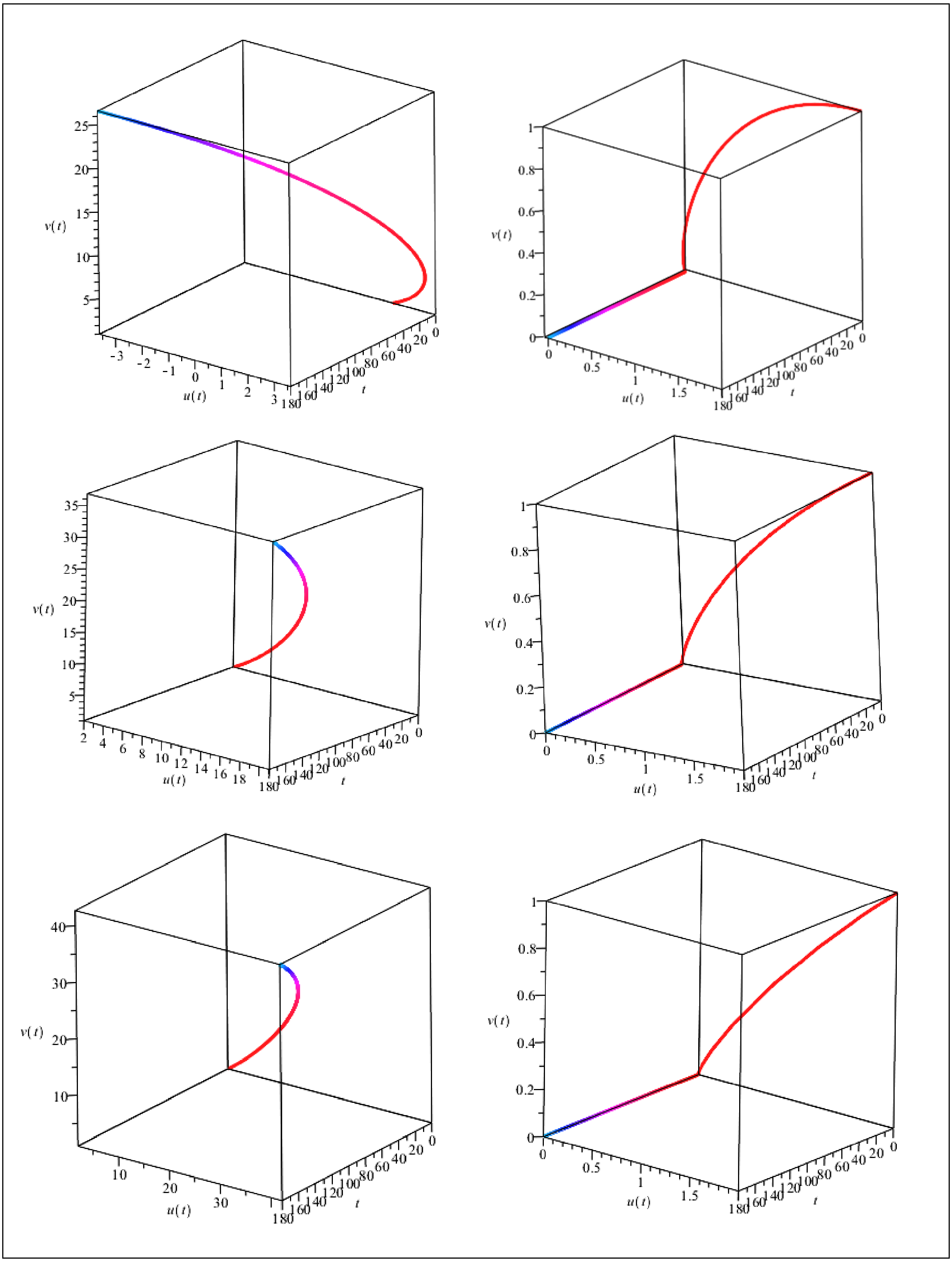
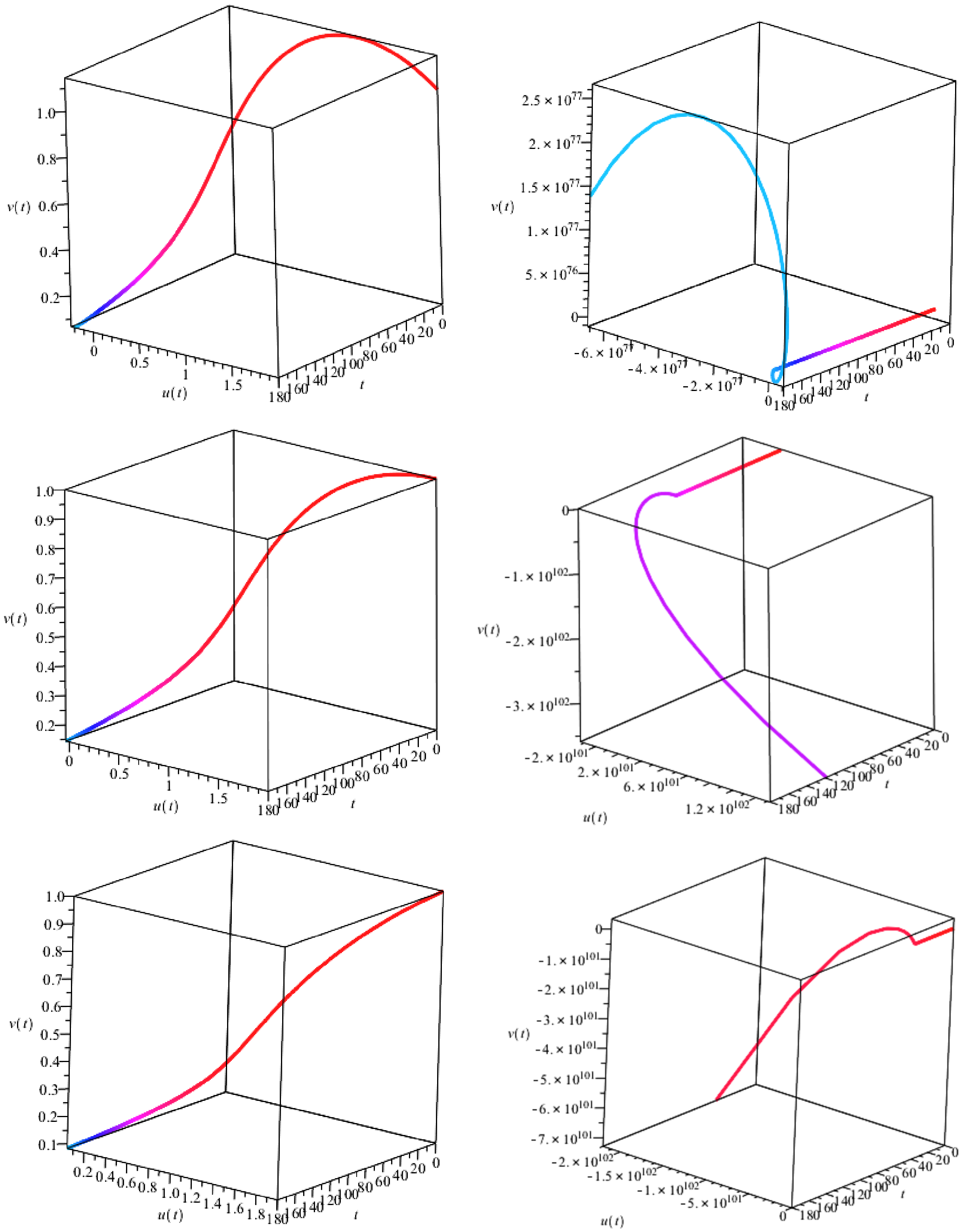


Рисунок 3 – Решение динамической системы (9):
a=0, a=1, a=-1, a=2, a=-2, a=5, a=-5, a=10, a=-10.



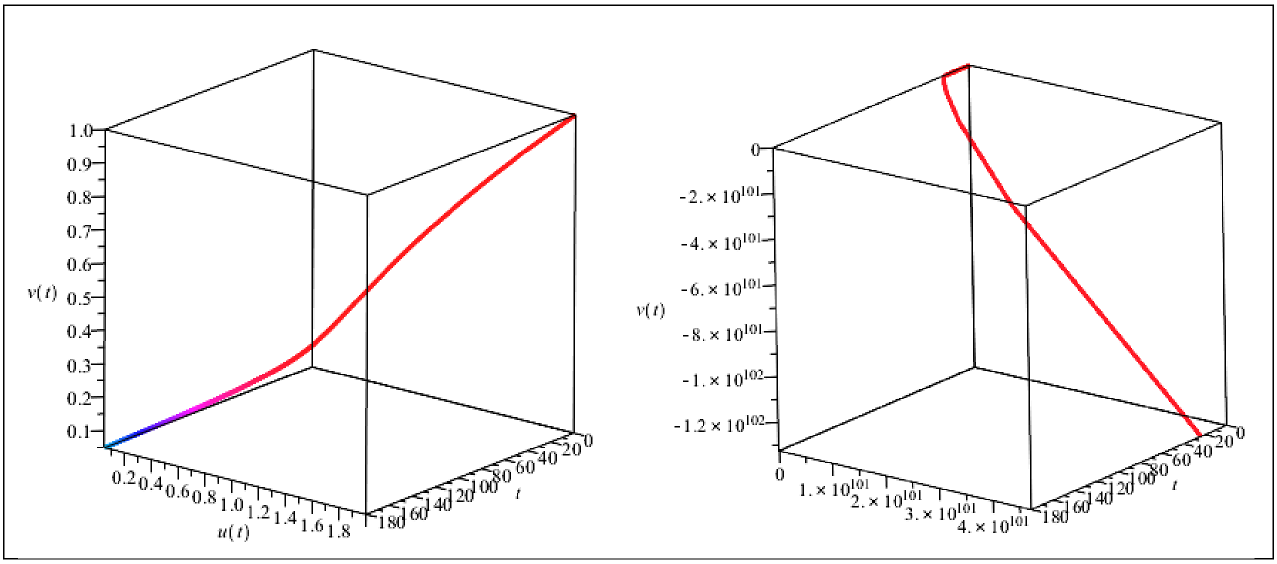


Рисунок 4 – Решение динамической системы (10):
a=1, a=-1, a=2, a=-2, a=5, a=-5, a=10, a=-10.

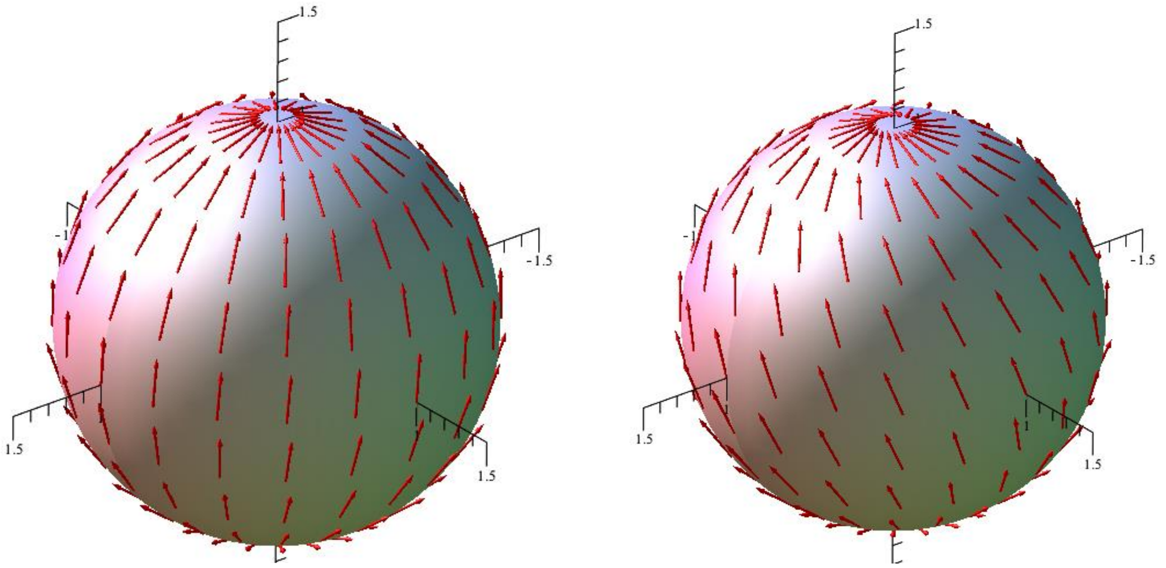


Рисунок 5 – Решение динамической системы (10) на сфере при a=0 и a=0.5 .

Перенос траекторий на сферу будем производить с помощью векторов.

Полученные решения (рис.5-7) характеризуют траектории динамических систем на сфере.

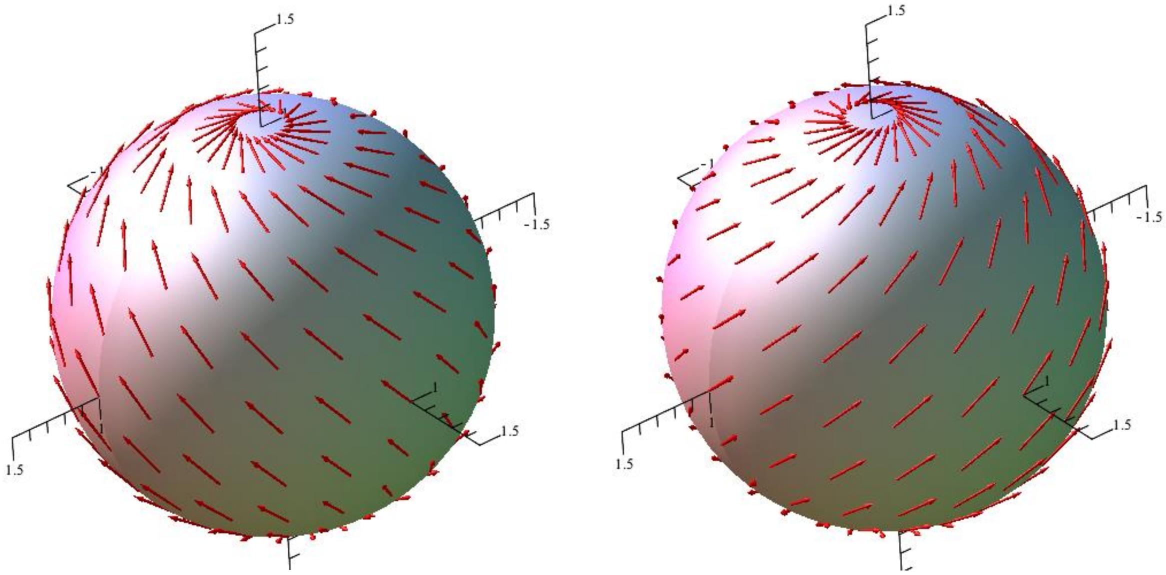


Рисунок 6 – Решение динамической системы (10) на сфере при a=1 и a= -1 .

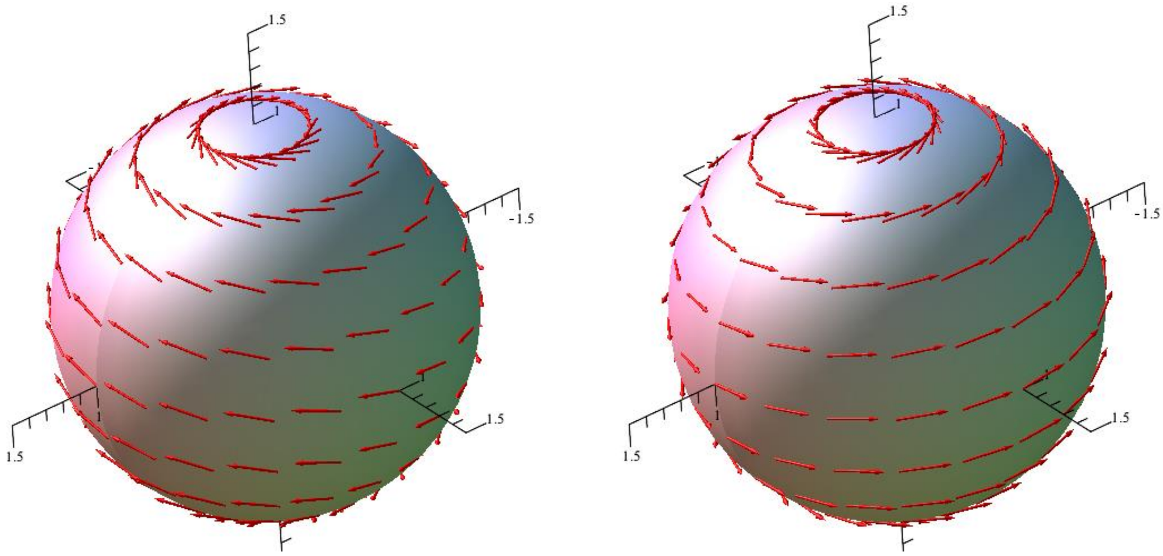


Рисунок 7 – Решение динамической системы (10) на сфере при a=5 и a= -5 .

References:

1. Andronov AA (1966) Qualitative theory of dynamical systems of the second order. – Moscow: Nauka. –pp.58-68.
2. Malkin IG (1966) teorija_ustoichivosti_dvizhenija. – Moscow: Nauka. –533 p.
3. Kalitin BS (2002) Qualitative theory of stability of motion of dynamical systems. Minsk, -198 p.
4. Martynyuk AA (1990) Stability of motion. the method of limiting equations. Kiev, -256 p.
5. Kosevich AM (1989) Keeping in nonlinear physical mechanics. Kiev, -304 p.
6. Kuznecov AP (2000) Kolebanija, katastrofy, bifurkacii, haos. Saratov, -98 p.
7. Magnickij NA, Sidorov SV (2004) Novye metody haoticheskoj dinamiki. URSS, -321 p.
8. Thompson JM (1982) Instabilities and Catastrophes in Science and Engineering. London, -254p.
9. Shapovalov AV (2002) Introduction To Nonlinear Physics. Tomsk, -129 p.