SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2015 **Issue:** 04 **Volume:** 24

Published: 30.04.2015 http://T-Science.org

Gennady Evgenievich Markelov
Cand. Sci. Eng., associate professor,
Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, Russia
markelov@bmstu.ru

SECTION 2. Applied mathematics. Mathematical modeling.

ON APPROACH TO CONSTRUCTING A WORKING MATHEMATICAL MODEL

Abstract: *The paper describes a unified approach to constructing a working mathematical model that to the sufficient extent has the desired properties. This approach reduces the time and study funds, allows efficient use of mathematical modeling.*

Key words: *working mathematical model, properties of mathematical models, principles of mathematical modeling.*

Language: *Russian*

Citation: Markelov GE (2015) ON APPROACH TO CONSTRUCTING A WORKING MATHEMATICAL MODEL. ISJ Theoretical & Applied Science 04 (24): 287-290.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS*04(24)52 ***Doi***: crossref http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.04.24.52

О ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ РАБОЧЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Аннотация: *В статье изложен единый подход к построению рабочей математической модели, которая в достаточной мере обладает нужными свойствами. Такой подход сокращает затраты времени и средств на проведение исследования, позволяет рационально использовать возможности математического моделирования.*

Ключевые слова: *рабочая математическая модель, свойства математических моделей, принципы математического моделирования.*

Введение

Математическое моделирование технических объектов обычно включает прохождение следующих основных этапов.

На первом этапе математического моделирования выполняют неформальный переход от объекта исследования к его содержательной модели. Под содержательной моделью понимают условное описание объекта исследования, которое должно учитывать его особенности и количественные характеристики, существенные для рассматриваемого случая. При этом обосновывают допущения и упрощения, позволяющие не учитывать те свойства и качества объекта исследования, которые предполагают несущественными.

На втором этапе осуществляют математическое описание содержательной модели. В результате такого формального описания получают математическую модель объекта исследования, причем можно разработать не одну, а несколько математических моделей одного и того же объекта исследования.

На третьем этапе математического моделирования при выполнении качественного и оценочного количественного анализа математической модели могут возникнуть основания для уточнения или пересмотра содержательной модели, что приведет к повторному прохождению первого этапа математического моделирования. Сравнение результатов анализа различных математических моделей позволяет сделать обоснованный выбор модели для дальнейшего детального количественного анализа. Итогом рассматриваемого этапа является разработка ***рабочей математической модели***, *т.е. математической модели, предназначенной для детального количественного анализа*.

На четвертом этапе формулируют вычислительную задачу, анализ результатов решения которой может дать ответы на интересующие вопросы.

На пятом этапе математического моделирования осуществляют обоснованный выбор или построение численного метода. Как правило, численный метод не включает многие детали, без которых невозможно использовать средства вычислительной техники. Тут необходима подробная детализация всех этапов вычислений, для того чтобы получить реализуемый алгоритм вычислительного эксперимента. Разработка эффективного алгоритма вычислительного эксперимента является итогом шестого этапа математического моделирования.

На седьмом этапе разрабатывают программное обеспечение, реализующее вычислительный алгоритм.

На восьмом этапе проводят испытание программного продукта. Тщательная проверка результатов расчетов может обнаружить недостатки, для устранения которых необходимо прохождение предыдущих этапов математического моделирования. После устранения всех выявленных недостатков приступают к реализации вычислительного эксперимента. Проведение вычислительного эксперимента является итогом завершающего девятого этапа математического моделирования.

Возможности математического моделирования, подробно рассмотренные в обширной учебной и научной литературе, например, в работах [1–9], часто не используют рационально из-за того, что рабочая математическая модель исследуемого объекта не обладает нужными свойствами.

Целью настоящей работы является изложение подхода, позволяющего строить рабочую математическую модель, в достаточной мере обладающей нужными свойствами применительно к конкретному исследованию. Набор этих свойств может включать, например, кроме свойств полноты, точности, адекватности, продуктивности, экономичности, робастности и другие свойства [6; 9]. Очевидно, что такая математическая модель является ценным интеллектуальным продуктом — эквивалентом изучаемого объекта в рамках проводимого исследования.

Описание подхода к построению рабочей математической модели

Разработка рабочей математической модели, в достаточной мере обладающей нужными свойствами применительно к конкретному исследованию, обычно предполагает выполнение противоречивых требований. Они могут быть удовлетворены только на основе разумного компромисса, достижение которого в значительной мере зависит от уровня профессиональной подготовки исследователя.

Для достижения такого компромисса следует выполнять правила и рекомендации, которые стали итогом обобщения накопленного практического опыта разработки математических моделей. В этой связи особый интерес представляют основные принципы, приведенные в работе [10]. Их разумное использование позволяет реализовать единый подход к построению рабочей математической модели, в достаточной мере обладающей нужными свойствами применительно к конкретному исследованию.

Пример построения рабочей математической модели

Далее рассмотрим наглядный пример построения рабочей математической модели, применяя в основном только один из приведенных в работе [10] принципов — принцип постепенного усложнения.

Пусть в рамках проводимого исследования представляет интерес величина

$$z = x/r(y), \tag{1}$$

где $r(y) = r_0[1+\beta(y-y_0)]$ — функция действительного переменного y; $y = y(t)$ — функция времени t, для которой $y(t_0) = y_0$; y_0 и t_0 — известные неотрицательные величины; x, r_0 и β — известные положительные постоянные величины. В рассматриваемом случае возможен установившийся режим, для которого справедливо равенство

$$x^2/r(\bar{y}) = 1+\sigma(\bar{y}-y_0), \tag{2}$$

где $\bar{y}$ — установившееся значение, причем $y_0 \le y \le \bar{y}$; σ — известная постоянная величина.

Искомая величина z может иметь смысл потенциала или потока физической субстанции в элементе технической системы. Построим рабочую математическую модель объекта исследования, которая в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности.

Для решения поставленной задачи выстроим иерархию математических моделей данного объекта исследования и определим условия, при выполнении которых можно с относительной погрешностью не более заданного значения δ_0 найти искомую величину.

Если разность $y - y_0$ достаточно мала, то согласно (1) найдем искомую величину по формуле

$$z_0 = x/r_0\,. \tag{3}$$

Определим условия, при которых применима полученная формула. Для этого рассмотрим установившийся режим.

Из равенства (2) легко найти

$$\bar{y} = y_0 + \frac{1}{2\beta}\left(-1 + \sqrt{1 + 4\beta x^2/(\sigma r_0)}\right),$$

а затем определить установившееся значение

$$\bar{z} = x/r(\bar{y}) = 2z_0 \Big/ \left(1 + \sqrt{1 + 4\beta x^2/(\sigma r_0)}\right). \quad (4)$$

Очевидно, что $\bar{z} \le z \le z_0$. Тогда для относительной погрешности величины z_0 запишем

$$\delta(z_0) = |z - z_0|/|z| = z_0/z - 1 \le z_0/\bar{z} - 1.$$

Следовательно, при выполнении условия

$$z_0/\bar{z} - 1 \le \delta_0$$

можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (3) для нахождения искомой величины. Тогда приходим к неравенству

$$\beta x^2/(\sigma r_0) \le \delta_0^2 + \delta_0, \quad (5)$$

при выполнении которого математическая модель (3) в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности, а формулу (3) разумно использовать для нахождения искомой величины.

Если существует возможность рассмотреть неустановившийся режим, то можно определить условия, при которых применима математическая модель (4).

Действительно, пусть для изучаемого объекта исследования справедливо обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$c(y)\frac{dy}{dt} = x^2/r(y) - \sigma(y - y_0), \quad (6)$$

где $c(y) = c_0[1 + \gamma(y - y_0)]$ — функция действительного переменного y; c_0 и γ — известные положительные постоянные величины. Тогда согласно (1) и (6) сформулируем задачу Коши

$$c_0[\gamma(z_0 - z) + \beta z]z_0 \frac{dz}{dt} = \beta[\sigma(z_0 - z) - x\beta z^2]z^2, \quad z(t_0) = z_0. \quad (7)$$

При выполнении условия

$$\delta(\bar{z}) = |z - \bar{z}|/|z| = 1 - \bar{z}/z \le \delta_0$$

можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (4) для нахождения искомой величины, причем $\delta_0 < z_0/\bar{z} - 1$, так как в противном случае следует применять формулу (3). Затем найдем момент времени

$$\begin{aligned} t_1 = t_0 + c_0\big[&z_0(\gamma(\bar{z} - z_0) - \beta\bar{z})\ln(\delta_0 z_0/(z_0 - \bar{z})) + \\ &+ (z_0\beta\bar{z} + \gamma(z_0 - \bar{z})z_0 - \\ &- \beta(2z_0 - \bar{z})\bar{z})\ln(2 - \delta_0 - \bar{z}/z_0) + \\ &+ \gamma z_0(2z_0 - \bar{z})(\delta_0 - 1 + \bar{z}/z_0)\big](\sigma\beta(2z_0 - \bar{z})\bar{z})^{-1}, \end{aligned}$$

для которого $z(t_1) = \bar{z}/(1 - \delta_0)$. Тогда согласно (7) установившееся значение $\bar{z}$ можно с относительной погрешностью не более δ_0 считать равным $z(t)$ при $t \ge t_1$.

Если неравенство (5) не выполняется, то математическая модель (4) при $t \ge t_1$ в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности, а формулу (4) разумно использовать для нахождения искомой величины.

Построение иерархии математических моделей позволяет выявить рабочую математическую модель, которая в достаточной мере обладает нужными свойствами применительно к конкретному исследованию. Действительно, если выполняется неравенство (5), то математическую модель (3) считаем рабочей, в противном случае выясняем, можно ли в рамках проводимого исследования не рассматривать временной интервал от t_0 до t_1. Если так поступить можно, то выбираем математическую модель (4) как рабочую, иначе — математическую модель (7).

Рабочая математическая модель данного объекта исследования получена с использованием в основном только одного принципа — принципа постепенного усложнения, что делает изложенное в этом примере похожим на «иерархический подход к получению моделей» [7].

Заключение

Таким образом, изложен единый подход к построению рабочей математической модели, которая в достаточной мере обладает нужными свойствами применительно к конкретному исследованию. Приведен пример построения такой математической модели с использованием в основном только принципа постепенного усложнения.

References:

1. Bender EA (2000) An Introduction to Mathematical Modeling. Dover Publ., Mineola, N.Y.
2. Dym CL (2004) Principles of Mathematical Modeling. Elsevier Academic Press.
3. Glasgow LA (2014) Applied Mathematics for Science and Engineering. John Wiley & Sons, Hoboken, N.J.
4. Heinz S (2011) Mathematical Modeling. Springer.
5. Meyer WJ (2004) Concepts of Mathematical Modeling. Dover Publ., Mineola, N.Y.
6. Myshkis AD (2014) Elements of the Theory of Mathematical Models [in Russian]. LIBROKOM, Moscow.
7. Samarskii AA, Mikhailov AP (2005) Mathematical Modeling: Ideas. Methods. Examples [in Russian]. FIZMATLIT, Moscow.
8. Velten K (2010) Mathematical Modeling and Simulation: Introduction for Scientists and Engineers. Wiley-VCH-Verl., Weinheim.
9. Zarubin VS (2010) Mathematical Modeling in Engineering [in Russian]. Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, Moscow.
10. Markelov GY (2005) Basic Principles to Construct Mathematical Models. Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki, No. 4, pp. 59–70.