SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2015 **Issue:** 07 **Volume:** 27

Published: 30.07.2015 http://T-Science.org

Liana Khusenovna Nazarova
Postgraduate Student of the Differential Equations Department, Department of Mathematics,
Kabardino-Balkarian State University,
Nalchik, Kabardino-Balkaria, Russian Federation
n.l.h@yandex.ru

Vadim Nikolayevich Lesev
Candidate of Physical and Mathematical Science,
Associate Professor, Head of the Differential Equations Department, Department of Mathematics,
Kabardino-Balkarian State University,
Nalchik, Kabardino-Balkaria, Russian Federation

SECTION 2. Applied mathematics. Mathematical modeling.

ABOUT TWO BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR EVEN-ORDER NONLINEAR EQUATIONS

Abstract: *The paper researches two boundary value problems for second-order and fourth-order nonlinear equations. Existence of regular solution of the fourth-order equation problem is proved by the quasi-stationary method. The boundary value problem for the fourth-order equation is researched by the variable separation method.*

Key words: *nonlinear equation, partial differential equation, variable separation method, quasi-stationary method.*

Language: *Russian*

Citation: Nazarova LK, Lesev VN (2015) ABOUT TWO BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR EVEN-ORDER NONLINEAR EQUATIONS. ISJ Theoretical & Applied Science 07 (27): 118-121.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-07-27-20 ***Doi***: crossref http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.07.27.20

О ДВУХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Аннотация: *В работе исследованы две краевые задачи для нелинейных уравнений второго и четвертого порядков. Доказательство существования регулярного решения задачи для уравнения второго порядка проведено квазистационарным методом. Краевая задача для уравнения четвертого порядка исследована методом разделения переменных.*

Ключевые слова: *нелинейное уравнение, уравнение в частных производных, метод разделения переменных, квазистационарный метод.*

1. Введение

Теория краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных относится к практически значимым разделам дифференциальных уравнений. Подобные задачи достаточно часто становятся основой математических моделей, применяемых в биологии, физике и других науках [1-8].

В настоящей работе исследованы две краевые задачи для нелинейных уравнений в частных производных второго и четвертого порядков. Вопрос существования регулярного решения в случае уравнения второго порядка исследован на основе квазистационарного метода, а доказательство существования решения для уравнения четвертого порядка проведено методом разделения переменных.

1. Краевая задача для нелинейного уравнения 2-го порядка

Рассмотрим краевую задачу для нелинейного уравнения 2-го порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial U}{\partial x}\right) + aU \ , \qquad (1)$$

где $a = const$, с условиями:

$$U_{x=0} = U\big|_{x=l} = \alpha(t)\,, \qquad (2)$$

$$U\big|_{t=0} = \gamma(x)\,. \qquad (3)$$

в области $\Omega = \{(x,t): 0 < x < l, 0 < t < l\}$.

Для исследования задачи (1) – (3) будем использовать квазистационарный метод, т.е. решение (1) уравнения будем искать в виде

$$U(x,t) = u_0(x) + \varepsilon\, u_1(x,t), \qquad (4)$$

где $u_0(x) = \langle U(x,t)\rangle$ - усреднение по времени.

Из (1), относительно u_0, принимая во внимание (4), получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u_0 u_0'' + u_0'^2 + a u_0 = 0\,. \tag{5}$$

С помощью замены $u_0' = p$, $u_0'' = pp'$, редуцируем уравнение (5) к виду:

$$u_0\, pp' + p^2 = -a u_0\,. \tag{6}$$

Рассмотрим соответствующее (6) однородное уравнение:

$$u_0\, pp' + p^2 = 0\,. \tag{7}$$

Разрешая (7), будем иметь:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{du_0}{u_0}\,.$$

Откуда, находим:

$$p = \frac{c_1}{u_0}\,. \tag{8}$$

Частное решение (8) будем искать методом вариации постоянных:

$$p_c = \frac{c_1(u_0)}{u_0}\,. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (6), получим

$$u_0 \frac{c_1(u_0)}{u_0} \frac{c_1'(u_0) u_0 - c_1(u_0)}{u_0^2} + \frac{c_1^2(u_0)}{u_0^2} = -a u_0\,.$$

Откуда, находим:

$$\frac{c_1'(u_0) c_1(u_0)}{u_0} = -a u_0\,,$$

или

$$c_1(u_0) = \left(-\frac{2a}{3} u_0^3\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, частное решение (6) будет иметь вид:

$$p_c = \left(-\frac{2a}{3} u_0\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

Производя обратную замену в (10), получим:

$$u_0' = \left(-\frac{2a}{3} u_0\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Интегрируя полученное выражение, будем иметь

$$u_0(x) = -\frac{a}{6}(x+c)^2\,, \tag{11}$$

где $c = const$.

Постоянную интегрирования c определим позже.

Возвращаясь к исследуемому уравнению (1) и принимая во внимание (4), приходим к равенству [9]:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = (u_0 + u_1)\frac{\partial^2 (u_0 + u_1)}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial (u_0 + u_1)}{\partial x}\right)^2 + a(u_0 + u_1) \tag{12}$$

Входящую в (12) искомую функцию u_1 будем искать в виде экспоненциальной зависимости [10]:

$$u_1(x,t) = A(x) e^{\omega t + \varphi_0}\,. \tag{13}$$

Из (12) с учетом (11) и (13), в случае $A(x) = const$ определяем ω:

$$\omega = \frac{2a}{3}\,.$$

Таким образом, окончательно для функции $u(x,t)$ можем записать:

$$u(x,t) = -\frac{a}{6}(x+c)^2 + A e^{\frac{2a}{3}t + \varphi_0}\,, \tag{14}$$

где c, A, φ_0 - произвольные числовые параметры.

Определим постоянные c, A, φ_0 удовлетворяя (14) условиям (2) и (3). Действительно, будем иметь:

$$\begin{cases} u\big|_{x=0} = -\dfrac{a}{6}c^2 + A e^{\omega t + \varphi_0} = \alpha(t)\,; \\ u\big|_{x=l} = -\dfrac{a}{6}(l+c)^2 + A e^{\omega t + \varphi_0} = \alpha(t)\,; \\ u\big|_{t=0} = -\dfrac{a}{6}(x+c)^2 + A e^{\varphi_0} = \gamma(x)\,. \end{cases} \tag{15}$$

Разрешая (15), находим:

$$c = -\frac{l}{2}\,.$$

Параметры A, φ_0 определяются в соответствии с типом популяционной модели.

Таким образом, решение задачи (1) – (3), представимо в виде (14).

2. Краевая задача для нелинейного уравнения 4-го порядка

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < l\}$ рассмотрим уравнение

$$U(U_{xxxx} + \alpha U_{xx}) - \beta U_t = 0\,, \tag{16}$$

где $\alpha, \beta = const > 0$.

Для уравнения (16) исследована задача.

Найти решение $U(x,t)$ в области Ω, удовлетворяющее условиям:

$$U(0,t) = U_x(0,t) = U(l,t) = U_x(l,t) = 0\,, \tag{17}$$

$$U(x,0) = \tau(x)\,, \tag{18}$$

и условиям согласования $\tau(0) = \tau(l) = 0$.

Решение задачи будем искать в виде произведения двух функций разных аргументов:

$$U(x,t) = X(x)T(t)\,. \tag{19}$$

Подставим (19) в уравнение (16), получим

$$X(x)T(t)\left(X^{IV}(x)T(t) + \alpha X''(x)T(t)\right) - $$
$$-\beta X(x)T'(t) = 0$$
$$T^2(t)\left(X^{IV}(x) + \alpha X''(x)\right) = \beta T'(t) = 0\,,$$

после разделения переменных будем иметь:

$$X^{IV}(x) + \alpha X''(x) = \lambda; \quad T'(t) = \frac{\lambda}{\beta}T^2(t)\,, \tag{20}$$

Рассмотрим уравнение

$$X^{IV}(x) + \alpha X''(x) = \lambda\,. \tag{21}$$

Характеристическое уравнение, соответствующего однородного уравнения (21), будет иметь вид:

$$k^4 + \alpha k^2 = 0\,,$$
$$k_{1,2} = 0, \quad k_{3,4} = \pm\sqrt{-\alpha} = \pm i\sqrt{\alpha}\,.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения примет вид:

$$X_{o.o} = c_1 + c_2 x + c_3\cos\sqrt{\alpha}x + c_4\sin\sqrt{\alpha}x.$$

Частное решение для уравнения (21) будем искать в виде:

$$X_{ч.н} = Ax^2 e^{kx} = Ax^2\,.$$

Подставляя полученное в (21), находим

$$A = \frac{\lambda}{2\alpha}, \quad X_{ч.н} = \frac{\lambda}{2\alpha}x^2\,.$$

Следовательно, общее неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$X(x) = \frac{\lambda}{2\alpha}x^2 + c_1 + c_2 x + $$
$$+ c_3\cos\sqrt{\alpha}x + c_4\sin\sqrt{\alpha}x\,. \tag{22}$$

Удовлетворяя (22) условиям (17), получим систему уравнений для определения постоянных c_1, c_2, c_3, c_4:

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_2 + \sqrt{\alpha}c_4 = 0 \\ c_1 + c_2 l + c_3\cos\sqrt{\alpha}l + c_4\sin\sqrt{\alpha}l = -\dfrac{\lambda}{2\alpha}l^2 \\ c_2 - \sqrt{\alpha}c_3\sin\sqrt{\alpha}l + \sqrt{\alpha}c_4\cos\sqrt{\alpha}l = -\dfrac{\lambda}{\alpha}l \end{cases} \tag{23}$$

Представим систему (23) в виде

$$AC=B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{\alpha} \\ 1 & l & \cos\sqrt{\alpha}l & \sin\sqrt{\alpha}l \\ 0 & 1 & -\sqrt{\alpha}\sin\sqrt{\alpha}l & \sqrt{\alpha}\cos\sqrt{\alpha}l \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{\lambda}{2\alpha}l^2 \\ -\dfrac{\lambda}{\alpha}l \end{pmatrix}$$

Разрешая (23), находим

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{\dfrac{\lambda}{2\sqrt{\alpha}}l^2 - \dfrac{\lambda}{\alpha}l\sin\sqrt{\alpha}l + \dfrac{\lambda}{2\sqrt{\alpha}}l^2\cos\sqrt{\alpha}l}{2\sqrt{\alpha} + 2\sqrt{\alpha}\cos\sqrt{\alpha}l - \alpha l\sin\sqrt{\alpha}l} \\ c_2 = \dfrac{-\dfrac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}l + \dfrac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}l\cos\sqrt{\alpha}l + \dfrac{\lambda}{2}l^2\sin\sqrt{\alpha}l}{2\sqrt{\alpha} + 2\sqrt{\alpha}\cos\sqrt{\alpha}l - \alpha l\sin\sqrt{\alpha}l} \\ c_3 = \dfrac{-\dfrac{\lambda}{2\sqrt{\alpha}}l^2\cos\sqrt{\alpha}l - \dfrac{\lambda}{2\sqrt{\alpha}}l^2 + \dfrac{\lambda}{\alpha}l\sin\sqrt{\alpha}l}{2\sqrt{\alpha} + 2\sqrt{\alpha}\cos\sqrt{\alpha}l - \alpha l\sin\sqrt{\alpha}l} \\ c_4 = \dfrac{\dfrac{\lambda}{\alpha}l - \dfrac{\lambda}{\alpha}l\cos\sqrt{\alpha}l - \dfrac{\lambda}{2\sqrt{\alpha}}l^2\sin\sqrt{\alpha}l}{2\sqrt{\alpha} + 2\sqrt{\alpha}\cos\sqrt{\alpha}l - \alpha l\sin\sqrt{\alpha}l} \end{cases}$$

Интегрируя второе из уравнений (20), получим

$$T(t) = -\frac{\beta}{\lambda t + \beta c}\,. \tag{24}$$

Принимая во внимание (19), (22), (24), при условии, что $\tau(x) \propto X(x)$, окончательно, будем иметь:

$$U(x,t) = -\frac{\beta}{\lambda t + \beta c}\left[\frac{\lambda}{2\alpha}x^2 + c_1 + c_2 x + \right.$$
$$\left. + c_3\cos\sqrt{\alpha}x + c_4\sin\sqrt{\alpha}x\right]. \tag{25}$$

Таким образом (25) представляет собой решение задачи (16)-(18) и принадлежит требуемому классу функций.

References:

1. Ayshayev KM, Lesev VN (2007) To the theory of high-order nonlinear equations // Perspektiva-2007: Materials of the International Congress of Students, Post-graduate Students and Young Scientists. - Nalchik: Kabardino-Balkarian University, 2007. - pp. 162-163.
2. Gegueva MM, Grinyuk VN, Kasumov UN, Lesev VN, Sozaev VA (2015) Thermodynamic

modelling of processes in zone-melting with electrical and thermal transfer in a liquid zone // News of the Russian Academy of Sciences. Physical Series. 2015. V. 79. No. 6. - pp. 814-816.

3. Lesev VN (2012) The study of the mathematical model of capillary soaking in the magnetic field // Modern scientific research and their practical application. 2012. - Vol. J31209. - pp. 19-39.
4. Lesev VN, Sozaev VA (2010) Research of the problem about spreading of a liquid drop on a horizontal surface // News of Institutes of Higher Education. North-Caucasian Region. Natural sciences. 2010, No. 3. - pp. 28-31.
5. Lesev VN, Sozaev VA (2011) Research of small drops' statics and dynamics. Fundamental basics, mathematical models, numerical methods. - Saarbrücken (Germany): Lambert Academic Publishing. 2011. - pp.128.
6. Nahushev AM (1995) Equations of mathematical biology. - Moscow: Vysshaya shkola, 1995. - pp. 301.
7. Polyanin AD, Zhurov AI (2014) Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014. Vol. 19, No. 3. - pp. 417-430.
8. Polyanin AD, Zaytsev VF, Zhurov AI (2005) Methods of solving nonlinear equations of mathematical physics and mechanics. - Moscow: Fizmatlit, 2005.
9. Nazarova LK (2014) Free boundary value problem for second-order quasi-linear equation // News of Smolensk State University. 2014. No. 3 (27). pp. 251-258.
10. Nazarova LK (2012) About one particular solution of a second-order partial differential equation with exponential nonlinearity // South-Siberian Scientific Bulletin. 2012. No. 2. pp. 161-164.