SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2018 **Issue:** 06 **Volume:** 62

Published: 25.06.2018 http://T-Science.org

Unona Krahmaleva
Candidate of Science
Taraz State University named M.H.Dulaty

Assylay Bekmurzayeva
Graduate student of the 4-th course of the specialty «Mathematics»
Taraz State University named M.H.Dulaty

SECTION 2. Applied mathematics. Mathematical modeling.

SOLVING OF *n*-ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS IN MAPLE PROGRAM

***Abstract**: In the Article work conducted the research of methods of solving of n-order linear differential equations with constant coefficients of the computer algebra Maple. The automated mathematical programs with application of a mathematical Maple package are developed for finding of the analytical solution of the (homogeneous and in homogeneous) 3 -order linear differential equations with constant coefficients.*

***Key words**: differential equations, problems, Maple.*
***Language**: Russian*
***Citation**:* Krahmaleva U, Bekmurzayeva A (2018) SOLVING OF *n*-ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS IN MAPLE PROGRAM. ISJ Theoretical & Applied Science, 06 (62): 86-91.
Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-06-62-19 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2018.06.62.19

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ *n*-ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В СРЕДЕ MAPLE.

***Аннотация**: В статье проводится исследование методов нахождения решения линейных дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами средствами компьютерной алгебры Maple. Представлены автоматизированные математические программы с применением математического пакета Maple для нахождения аналитического решения линейных дифференциальных уравнений (однородных и неоднородных) -го порядка и выше с постоянными коэффициентами.*

***Ключевые слова**: дифференциальное уравнение, однородное линейное уравнение, неоднородное линейное, с постоянными коэффициентами.*

Introduction

В настоящее время, существуют различные подходы к решению дифференциальных уравнений. Первый подход связан с реализацией на бумаге, если известны методы решения уравнений, что представляет собой достаточно трудоемкий процесс. Компьютерная реализация алгоритма на каком – либо языке программирования является вторым подходом. Третий, основан на применении имеющихся современных систем компьютерной математики. В этих системах имеются процедуры реализации необходимых алгоритмов решения. Именно этот подход является наиболее рациональным не только с точки зрения избегания ошибок, но и сокращения времени решения. Этот подход предполагает не только знание алгоритмов решения, но и ихх особенностей, для правильного использования достоинств и недостатков, а так же интерпретации результатов.

Materials and Methods

Рассмотрим задачу нахождения аналитического решения линейных однородных дифференциальных уравнений n -го порядка с постоянными коэффициентами:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (1)$$

где коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_n$ -постоянные вещественные числа.

Для нахождения общего решения уравнения (1) воспользуемся стандартными средствами пакета современной компьютерной математики Maple. В Maple работа с дифференциальными уравнениями начинается с подключения специализированного пакета *DEtools*.

Найдем общее решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами 3-го порядка:

$$y'''-6y''+11y'-6y=0$$

Подключив пакет *DEtools*, вводим уравнение. Для производных функции при записи дифференциального уравнения используем команду прямого исполнения $diff(f,x)$, первый аргумент которой есть дифференцируемая функция, а второй - переменная, по которой надо брать производную. Для производных высших порядков указываем в параметрах $x\$n$, где n - порядок производной, т.е. $diff(f,x\$n)$:

```
> restart;
  with(DEtools):
  eq1:=diff(y(x),x$3)-6*diff(y(x),x$2)+11*diff(y(x),x)-6*y(x)=0;
  dsolve(eq1,y(x));
```

$$eq1 := \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} y(x)\right) - 6\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)\right) + 11\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right) - 6\, y(x) = 0$$

$$y(x) = \_C1\, e^{x} + \_C2\, e^{(2\,x)} + \_C3\, e^{(3\,x)}$$

Для нахождения аналитического решения данного дифференциального уравнений применяем команду $dsolve(eq, var)$, где eq – дифференциальное уравнение, var – неизвестная функция и получим общее решение указанного уравнения, в котором число постоянных равно порядку уравнения и имеют обозначения в системе Maple в виде $\_C1$, $\_C2$ … .

Рассмотрим решение линейного дифференциального уравнения более высокого порядка, например, 5-го порядка:

$$y^{V} - 2y^{IV} + 2y^{III} - 4y^{II} + y^{I} - 2y = 0$$

и применим выше описанный алгоритм:

```
> restart;
  wuth(DEtools):
  eq2:=diff(y(x),x$5)-2*diff(y(x),x$4)+2*diff(y(x),x$3)-4*diff(y(x),x$2)+diff(y(x),x)-2*y(x)=0;
  dsolve(eq2,y(x));
```

$$eq2 := \left(\frac{\partial^5}{\partial x^5} y(x)\right) - 2\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} y(x)\right) + 2\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} y(x)\right) - 4\,\%1 + \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right) - 2\, y(x) = 0$$

$$\%1 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)$$

$$y(x) = \_C1 \cos(x) + \_C2 \sin(x) + \_C3\, e^{(2\,x)} + \_C4 \sin(x)\, x + \_C5 \cos(x)\, x$$

Как видим, линейное дифференциальное однородное уравнение 3-го порядка и выше решается с помощью команды *dsolve* и не сопряжено с какими-либо затруднениями. Это дает возможность составить автоматизированную программу для решения линейного дифференциального уравнения 3–го порядка, которую можно в дальнейшем применять для нахождения общего решения линейных дифференциальных неоднородных уравнений более высших порядков вводя, лишь коэффициенты уравнения.

Запишем коэффициенты линейного дифференциального однородного уравнения $3-$го порядка, которое имеет вид:

$$a_0 y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0,$$

вводим дифференциальное уравнение и применяя команду $dsolve(eq, \mathrm{var})$, получим общее решение дифференциального уравнения:

```
> restart;
  with(DEtools):
  a0:=_;a1:=_;a2:=_;a3:=_;
  eq1:=a0*diff(y(x),x$3)+a1*diff(y(x),x$2)+a2*diff(y(x),x)+a3*y(x)=0;
  dsolve(eq,y(x));
```

Рассмотрим нахождение общего решения линейного дифференциального неоднородного уравнения n–го порядка:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad (2)$$

где коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$- постоянные вещественные числа. Для решения уравнения (2) применяется метод подбора частного решения, если функция $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right), \qquad (3)$$

или состоит из суммы такого рода функций. Во всех остальных случаях используют метод вариации произвольных постоянных.

Найдем общее решение линейного дифференциального неоднородного уравнения 3-го порядка:

$$y''' + 3y'' - 10y' = x - 3,$$

где $f(x) = x - 3$ имеет вид (3), где $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $P(x) = x - 3$.

Применим тот же алгоритм решения средствами пакета Maple, как и при нахождении общего решения линейного дифференциального однородного уравнения:

```
> restart;
  with(DEtools):
  eq3:=diff(y(x),x$3)+3*diff(y(x),x$2)-10*diff(y(x),x)=x-3;
  dsolve(eq3,y(x));
```

$$eq3 := \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} y(x)\right) + 3\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)\right) - 10\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right) = x - 3$$

$$y(x) = \frac{27}{100}x - \frac{1}{20}x^2 + \_C1 + \_C2\, e^{(-5x)} + \_C3\, e^{(2x)}$$

Как видим, общее решение линейного дифференциального неоднородного уравнения записано таким образом, что четко видна, структура этого решения - сумма общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения и частного решения этого же неоднородного дифференциального уравнения. В строке вывода, решение неоднородного линейного дифференциального уравнения состоит из слагаемых, которые содержат произвольные постоянные, что соответствует общему решению соответствующего однородного уравнения, и слагаемых без произвольных постоянных , что представляет частное решение этого же неоднородного дифференциального уравнения.

Рассмотрим решение линейного дифференциального неоднородного уравнения 3-го порядка следующего вида :

$$y'''-y'=\sin 3x,$$

и применим ранее описанный алгоритм нахождения общего решения линейного дифференциального однородного уравнения:

```
> restart;
  with(DEtools):
  eq4:=diff(y(x),x$3)-diff(y(x),x)=sin(3*x);
  dsolve(eq4,y(x));
```

$$eq4 := \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}y(x)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x}y(x)\right)=\sin(3\,x)$$

$$y(x)=\frac{1}{30}\cos(3\,x)+\_C1+\_C2\,e^{x}+\_C3\,e^{(-x)}$$

Следовательно, для нахождения общего решения линейных дифференциальных неоднородных уравнений со специальной правой частью вида $f(x)=e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x)$ используется тот же алгоритм, как и для линейных дифференциальных однородных уравнений.

Рассмотрим нахождение общего решения линейного дифференциального неоднородного уравнения, где функция $f(x)$ не является выражением вида (3). Данное уравнение решается с помощью метода вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

Найдем общее решение линейного дифференциального неоднородного уравнения 3-го порядка:

$$y'''+y'=\frac{1}{\cos x},$$

используем алгоритм нахождения общего решения линейных дифференциальных неоднородных уравнений со специальной правой частью.

```
> restart;
  with(DEtools):
  eq5:=diff(y(x),x$3)+diff(y(x),x)=1/cos(x);
  dsolve(eq5,y(x));
```

$$eq5 := \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}y(x)\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x}y(x)\right)=\frac{1}{\cos(x)}$$

$$y(x)=\ln\left(\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right)-x\cos(x)+\ln(\cos(x))\sin(x)+\_C1+\_C2\cos(x)+\_C3\sin(x)$$

В записи общего решения слагаемые, соответствующие частному решению уравнения имеют сложные алгебраические выражения. Попробуем улучшить результат вычисления, используя команду *dsolve*, в параметрах которой укажем опцию *output=basis*.Данная опция дает возможность найти фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения. Для нахождения решения используем функцию пакета *varparam(sols,v,ivar)*, которая находит общее решение дифференциального уравнения *sols* методом вариации произвольных постоянных, *v* задает правую часть уравнения, *ivar* задает переменную:

```
> restart;
  with(DEtools):
  eq5:=diff(y(x),x$3)+diff(y(x),x)=1/cos(x);
  eq6:=diff(y(x),x$3)+diff(y(x),x)=0;
  dsolve(eq6,y(x),output=basis);
  sols:=dsolve(eq6,y(x),output=basis);
  y:=varparam(sols,1/cos(x),x);
```

$$eq5 := \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} y(x)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$eq6 := \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} y(x)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right) = 0$$

$$[1, \cos(x), \sin(x)]$$

$$sols := [1, \cos(x), \sin(x)]$$

$$y := \_C_1 + \_C_2 \cos(x) + \_C_3 \sin(x) + \ln(\sec(x) + \tan(x)) - x\cos(x) + \ln(\cos(x))\sin(x)$$

Сравнивая полученный результат вычисления общего решения уравнения с раннее имеющимся, видно, что выражение общего решения записано в более упрощенной форме. Теперь есть возможность составить общую программу решения уравнения

$$y''' + y' = \frac{1}{\cos x},$$

которая содержит метод подбора частных решений и метод вариации произвольных постоянных, для нахождения общего решения любого линейного дифференциального неоднородного уравнения. Правую часть уравнения (2) $f(x) = e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x)$ запишем в 2-х формах $f(x) = e^{\alpha x}P(x)$ и $h(x) = e^{ux}(M(x)\cos vx + N(x)\sin vx)$, при этом многочлены $P(x), Q(x), M(x), N(x)$ записываются с учетом степени присутствующего многочлена правой части. Правая часть, соответствующая методу вариации произвольных постоянных записывается в виде функции $g(x)$:

```
> restart;with(DEtools):
  a0:=1:a1:=0:a2:=1:a3:=0:
  a:=0:P0:=0:P1:=0:P2:=0:P3:=0:
  u:=0:M0:=0:M1:=0:M2:=0:M3:=0:v:=0:N0:=0:N1:=0:N2:=0:N3:=0:
eq:=a0*diff(y(x),x$3)+a1*diff(y(x),x$2)+a2*diff(y(x),x)+a3*y(x);
f(x):=(e^(a*x))*(P0*x^3+P1*x^2+P2*x+P3);
h(x):=(e^(u*x))*((M0*x^3+M1*x^2+M2*x+M3)*cos(v*x)+(N0*x^3+N1*x^2+N2*x+N3)*sin(v*x));
g(x):=1/cos(x);
```

Зададим условие так, чтобы по виду правой части уравнения определила метод решения, получим:

```
if f(x)<>0 or h(x)<>0 then print('metod_neopred_koefficientov') else print('metodvariacii');fi;
```

```
if f(x)<>0  then print('reshenie_eq6');eq6:=dsolve(eq=f(x),y(x));fi;
if h(x)<>0  then print('reshenie_eq7');eq7:=dsolve(eq=h(x),y(x));fi;
if g(x)<>0  then print('reshenie_eq8');eq8:=diff(y(x),x$3)+diff(y(x),x)=0;
sols:=dsolve(eq8,y(x),output=basis);  y:=varparam(sols,1/cos(x),x);fi;
```

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} y(x)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right) = \frac{1}{\cos(x)}$$

metodvariacii

reshenieeq8

$$eq8 := \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} y(x)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right) = 0$$

$$sols := [1, \cos(x), \sin(x)]$$

$$y := \mathrm{varparam}\left([1, \cos(x), \sin(x)], \frac{1}{\cos(x)}, x\right)$$

$$y := \_C_1 + \_C_2 \sin(x) + \_C_3 \cos(x) + \ln(\sec(x) + \tan(x)) + \ln(\cos(x)) \sin(x) - x \cos(x)$$

Conclusion

Таким образом, для использования программы нужно определить составляющие правой части дифференциального уравнения вида $f(x) = e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right)$ и ввести коэффициенты для одной из функций $f(x) = e^{\alpha x}P(x)$ или $h(x) = e^{ux}\left(M(x)\cos vx + N(x)\sin vx\right)$, при этом $g(x) = 0$. В противном случае коэффициенты приравниваются к нулю и записывается функция $g(x)$. Данную программу можно использовать для нахождения общего решения дифференциальных неоднородных уравнений любого порядка, вводя соответствующие коэффициенты уравнения.

References:

1. Erugin N.P et al. (1974) Kniga dlya chteniya po obshchemu kursu obyknovennykh uravneniy.M.,1974.,65-77
2. Kartashev E.A., Rozhdestvenskiy B.L. (1976) Obyknovennye differentsial'nye uravneniya i osnovy variatsionnogo ischisleniya. M.,1976.
3. Krasnov M.L., Makarenko G.I. (1978) Sbornik zadach po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam.M.,1978.
4. N.M. Matveev. (1963) Metody integrirovaniya obyknovennykh differentsial'nykh.- Vysshaya shkola.,Moskva-1963.,336-467.
5. Petrovskiy I.G. (1970) Lektsii po teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravneniyyu M.,1970.,154-200
6. (1965) Pod redaktsiey P.E. Debyuka., G.I. Kruchkovicha., Sbornik zadach po kursu vysshey matematiki.M.1965.
7. Pontryagin L.S. (1974) Obyknovennye differentsial'nye uravneniya. M,1974.,41-62
8. Stepanov V.V. (1959) Kurs differentsial'nykh uravneniy, M., 1959., 214-241.
9. Filippov A.F. (1973) Sbornik zadach po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam. M., 1973., 60-75.
10. Tikhonov A.N., Vasil'eva A.B., Sveshnikov A.G. (2018) Differentsial'nye uravneniya., 33-45.