SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal

Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2020 **Issue:** 01 **Volume:** 81

Published: 21.01.2020 http://T-Science.org

QR – Issue QR – Article

Alexandr Sergeevych Praded
Bryansk State University named after I.G. Petrovsky
student, Russia

ω-FIBERED FITTING CLASSES OF FINITE GROUPS

Abstract: *The article is devoted to study of ω-fibered Fitting classes of finite groups. The main research method used in the article is functional. We have obtained the description of the structure of functions-satellites of some ω-fibered Fitting classes of finite groups.*

Key words: *a finite group, a class of groups, a Fitting class, an ω-fibered Fitting class.*

Language: *Russian*

Citation: Praded, A. S. (2020). ω-fibered fitting classes of finite groups. *ISJ Theoretical & Applied Science, 01 (81),* 117-120.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-01-81-22 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2020.01.81.22

Scopus ASCC: *2602.*

ω-ВЕЕРНЫЕ КЛАССЫ ФИТТИНГА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Аннотация: *Данная статья посвящена исследованию ω-веерных классов Фиттинга конечных групп. Основным методом исследования, применяемым в статье, является функциональный метод. В статье получено описание строения функций-спутников некоторых ω-веерных классов Фиттинга конечных групп.*

Ключевые слова: *конечная группа, класс групп, класс Фиттинга, ω-веерный класс Фиттинга.*

Введение

Теория групп представляет собой раздел математики, изучающий особые математические структуры – группы. Первоначально зародившись в рамках алгебры, данная теория позднее сформировалась как самостоятельное направление, имеющее свои средства, методы, особенности. По мере развития теории групп в ней самой стали появляться новые подразделы, одним из которых является теория классов групп. Класс Фиттинга представляет один из основных объектов, изучаемых в теории классов конечных групп. С момента возникновения теории классов групп появилось несколько подходов к изучению классов Фиттинга. Одним из наиболее эффективных является функциональный подход, заключающийся в использовании для описания классов Фиттинга специальных функций. На этом пути с помощью функций-спутников были построены локальные и ω-локальные, композиционные и Ω-композиционные классы Фиттинга. Важные результаты в данном направлении были получены К. Дерком, Т. Хоуксом, Н.Т. Воробьёвым, Н.Н. Воробьёвым и другими алгебраистами (см., например, [5, 10]). В дальнейшем развитие идей функционального метода привело к появлению функций-направлений, введённых в рассмотрение В.А. Ведерниковым в 1999 году (см., например, [3]). С помощью данных функций были построены ω-веерные и Ω-расслоенные классы Фиттинга конечных групп [3, 4]. Изучением таких классов занимались Е.Н. Бажанова, В.Е. Егорова, О.В. Камозина, Сыромолова О.В. и другие (см., например, [1, 6, 7, 9]). Целью данной работы является исследование строения функций-спутников ряда ω-веерных классов Фиттинга конечных групп.

В статье рассматриваются только конечные группы. Используемые определения для групп и классов групп стандартны (см., например, [10]). Приведём лишь некоторые из них. Классом групп называется множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G. Через $(\mathfrak{X})$ обозначается класс групп, порождённый множеством групп $(\mathfrak{X})$. Если $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ – классы групп, то $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 =$

Impact Factor:

ISRA (India)	= 4.971	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
ISI (Dubai, UAE)	= 0.829	РИНЦ (Russia)	= 0.126	PIF (India)	= 1.940
GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.716	IBI (India)	= 4.260
JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 5.667	OAJI (USA)	= 0.350

(G|существует $N \triangleleft G$ такая, что $N \in \mathfrak{F}_1$ и $G/N \in \mathfrak{F}_2$). Класс групп $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$, то $N \in \mathfrak{F}$;

2) если $G = N_1N_2$, $N_1 \in \mathfrak{F}$, $N_2 \in \mathfrak{F}$, $N_1 \triangleleft G$, $N_2 \triangleleft G$, то $G \in \mathfrak{F}$ [10].

Через $\mathfrak{E}$ обозначается класс всех конечных групп; N – класс всех конечных нильпотентных групп; П – множество всех простых чисел. Пусть F – класс групп, $p \in \mathbb{P}$, $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда $\mathfrak{F}_p$ и $\mathfrak{F}_\pi$ – соответственно классы всех p-групп и π-групп, принадлежащих классу F. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G; через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается F-корадикал группы G, т.е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, фактор-группа по которой принадлежит классу F. В дальнейшем через ω обозначается произвольное непустое множество простых чисел; $O^\omega(G) = G^{\mathfrak{E}_\omega}$ – E-омега корадикал группы G. Рассмотрим следующие функции:

$f: \omega \cup \{\omega'\} \to$ {классы Фиттинга},

$h: \mathbb{P} \to$ {классы Фиттинга},

$\delta: \mathbb{P} \to$ {непустые формации Фиттинга},

называемые соответственно ωR-функцией, ПR-функцией, ПFR-функцией. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{E} | O^\omega(G) \in f(\omega')$ и $G^{\delta(p)} \in f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G))$ называется ω-веерным классом Фиттинга с ω-спутником f, направлением δ и обозначается $\mathfrak{F} = \omega R(f,\delta)$; класс Фиттинга

$\mathfrak{H} = (G \in \mathfrak{E} | G^{\delta(p)} \in h(p)$ для любого $p \in \pi(G))$ называется веерным классом Фиттинга со спутником h и направлением δ и обозначается $\mathfrak{H} = \mathbb{P}R(h,\delta)$ [3]. Направление ω-веерного (веерного) класса Фиттинга называется b-направлением, если $\delta(p) = \mathfrak{N}_p\delta(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$; p-направлением, если $\delta(q) = \delta(q)\mathfrak{E}_{q'}$ для любого $q \in \mathbb{P}$ [2]. Через $\mathfrak{E}_{c\omega}$ обозначим класс всех групп, у которых каждый главный ω-фактор централен; $\mathfrak{E}_{c\omega'}$ – класс всех групп, у которых каждый главный ω'-фактор централен.

В теоремах 1 – 3 получено описание ω-спутников ω-веерных классов Фиттинга $\mathfrak{E}_\pi$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_\pi$ всех π-групп, всех нильпотентных групп и всех нильпотентных π-групп соответственно.

Теорема 1. *Пусть* $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{E}_\pi$. *Тогда* $\mathfrak{F}_1 = \omega R(f,\delta)$, *где* δ – *произвольная* ПFR - *функция*, f –ωR-*функция, имеющая следующее строение:* $f(\omega') = \mathfrak{E}_\pi$, $f(p) = \mathfrak{E}_\pi$, *если* $p \in \pi$, $f(p) = \emptyset$, *если* $p \in \omega \backslash \pi$, *для любого* $p \in \omega$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \omega R(f,\delta)$. 1) Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда по определению ω-веерного класса Фиттинга $O^\omega(G) \in f(\omega') = \mathfrak{E}_\pi$ (а) и $G^{\delta(p)} \in f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$ (б). Поскольку $G^{\mathfrak{E}_\pi} \triangleleft G$ и для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$ выполняется $f(p) \neq \emptyset$, то $f(p) = \mathfrak{E}_\pi$ и $p \in \pi$. Таким образом, $\omega \cap \pi(G) \subseteq \pi$ (*). Так как $G/G^{\mathfrak{E}_\omega} \in \mathfrak{E}_\omega$, то $\pi(G/G^{\mathfrak{E}_\omega}) \subseteq \omega$. Кроме того, $|G| = |G/G^{\mathfrak{E}_\omega}| \cdot |G^{\mathfrak{E}_\omega}|$ (**). Тогда $\pi(G/G^{\mathfrak{E}_\omega}) \subseteq \pi(G)$. В таком случае получаем, что $\pi(G/G^{\mathfrak{E}_\omega}) \subseteq \pi(G) \cap \omega$. Согласно утверждению (*) это означает, что $\pi(G/G^{\mathfrak{E}_\omega}) \subseteq \pi$. Так как $|G/G^{\mathfrak{E}_\omega}|$ – π-число и $|G^{\mathfrak{E}_\omega}|$ – π-число, то, ввиду равенства (**), получаем, что $|G|$ – π-число. Следовательно, $G \in \mathfrak{E}_\pi = \mathfrak{F}_1$. Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

2) Покажем, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}_1$. Это означает, что $\pi(G) \subseteq \pi$. Тогда $O^\omega(G) \in \mathfrak{E}_\pi = f(\omega')$ (а). Пусть $p \in \omega \cap \pi(G)$. Поскольку $G \in \mathfrak{F}_1$, то, ввиду $G^{\delta(p)} \triangleleft G$, отсюда следует, что $G^{\delta(p)} \in \mathfrak{E}_\pi = f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$ (б). Из (а) и (б) следует, что $\mathfrak{F} = \omega R(f,\delta)$. Таким образом, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Из 1) и 2) следует, что $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{N}$. *Тогда* $\mathfrak{F}_1 = \omega R(f,\delta)$, *где* δ – *bp-направление* ω-*веерного класса Фиттинга такое, что* $\bigcap_{p\in\omega}\delta(p) \subseteq \mathfrak{E}_{c\omega} \cap \mathfrak{E}_{c\omega'}$, f – ωR-*функция, имеющая следующее строение:* $f(\omega') = \mathfrak{N}$ *и* $f(p) = (1)$ *для любого* $p \in \omega$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \omega R(f,\delta)$. 1) Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Покажем, что группа G является нильпотентной. Из того, что $G \in \mathfrak{F} = \omega R(f,\delta)$ следует, что $O^\omega(G) \in f(\omega') = \mathfrak{N}$ и $G^{\delta(q)} \in f(q) = (1)$ для любого $q \in \omega \cap \pi(G)$. Таким образом, для группы G справедливо: $O^\omega(G) \in \mathfrak{N}$ (1) и $G \in \delta(q)$ для любого $q \in \omega \cap \pi(G)$ (2).

Покажем, что $G \in \mathfrak{E}_{c\omega} \cap \mathfrak{E}_{c\omega'}$. Ввиду условия теоремы, достаточно проверить, что $G \in \bigcap_{p\in\omega}\delta(p)$. Пусть $p \in \omega\backslash\pi(G)$. Тогда G – p'-группа. В таком случае $G \in \mathfrak{E}_{p'}$. Так как δ – bp-направление ω-веерного класса Фиттинга, то $\delta(p)\mathfrak{E}_{p'} = \delta(p)$. Таким образом, $G \in \mathfrak{E}_{p'} \subseteq \delta(p)\mathfrak{E}_{p'} = \delta(p)$. Следовательно, $G \in \delta(p)$ для любого $p \in \omega\backslash\pi(G)$ (3). Из (2) и (3) следует, что $G \in \bigcap_{p\in\omega}\delta(p)$. Тогда, ввиду условия теоремы, $G \in \mathfrak{E}_{c\omega} \cap \mathfrak{E}_{c\omega'}$ (4).

Покажем, что в G каждый главный фактор централен. Ввиду (4) достаточно проверить, что в G каждый главный фактор является либо ω-фактором, либо ω'-фактором. Рассмотрим главный ряд группы G, проходящий через $O^\omega(G)$: $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_k = O^\omega(G) \triangleright G_{k+1} \triangleright \dots G_m = 1$ (5). Так как $G/O^\omega(G) \triangleright G_1/O^\omega(G) \triangleright \dots \triangleright G_k/O^\omega(G) \cong 1$ – главный ряд группы $G/O^\omega(G)$, $(G_{i-1}/O^\omega(G))/(G_i/O^\omega(G)) \cong G_{i-1}/G_i$, $i = \overline{1,k-1}$ и $G/O^\omega(G) \in \mathfrak{E}_\omega$, то каждый главный фактор группы G в (5) выше $O^\omega(G)$ является ω-фактором (6).

Так как $O^\omega(G) \in \mathfrak{N}$, то все главные факторы группы G в (5) ниже $O^\omega(G)$ являются абелевыми. Так как простая абелева группа – это в точности циклическая группа Z_p порядка p, для некоторого $p \in \mathbb{P}$, то каждый главный фактор группы G в (5) ниже $O^{\omega}(G)$ является либо ω-фактором (в случае, когда $p \in \omega$), либо ω'-фактором (в случае, когда $p \notin \omega$) (7).

Из (6) и (7) следует, что в (5) все факторы центральны. Следовательно, $G \in \mathfrak{N} = \mathfrak{F}_1$ и поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

2) Покажем, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}_1$. Установим, что группа G принадлежит ω-веерному классу Фиттинга $\mathfrak{F}$. Для этого достаточно проверить, что $O^{\omega}(G) \in f(\omega')$ (а) и $G^{\delta(p)} \in f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$ (б). Покажем, что $O^{\omega}(G) \in f(\omega')$. Рассмотрим подгруппу $O^{\omega}(G)$ группы G. Так как группа G нильпотентна и $O^{\omega}(G)$ – подгруппа данной группы, то по свойству нильпотентных групп [8]$O^{\omega}(G)$ также является нильпотентной. Тогда $N = O^{\omega}(G) \in \mathfrak{N} = f(\omega')$. Таким образом, утверждение (а) доказано.

Покажем, что $G^{\delta(p)} \in f(p)$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(G)$. Ввиду того, что $f(p) = 1$, достаточно проверить, что $G^{\delta(p)} = 1$. Для этого достаточно установить, что $G \in \delta(p)$. Действительно, так как $G \in \mathfrak{N}$, то $G = G_{p_1} \times G_{p_2} \times \dots \times G_{p_k}$, где G_{p_i} – силовская p_i-подгруппа группы G, $i = \overline{1,k}$, $\pi(G) = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$. Пусть $H = G_{p_2} \times \dots \times G_{p_k}$, $p_1 = p$. Тогда $G = G_p \times H$, где H – p'-холловская подгруппа группы G. В таком случае $G_p \lhd G$, $G_p \in \mathfrak{N}_p$ и $G/G_p \cong H \in \mathfrak{E}_{p'}$. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$. Поскольку δ – bp-направление ω-веерного класса Фиттинга, то $G \in \delta(p)$. Таким образом, утверждение (б) доказано.

Из (а) и (б) следует, что $G \in \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Из 1) и 2) следует, что $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\pi}$. *Тогда* $\mathfrak{H} = \omega R(f, \delta)$, *где* δ – *bp-направление, такое, что* $\bigcap_{p \in \omega} \delta(p) \subseteq \mathfrak{E}_{c\omega} \cap \mathfrak{E}_{c\omega'}$, f – *ωR-функция, имеющая следующее строение:* $f(\omega') = \mathfrak{N}_{\pi}$ *и для любого* $p \in \omega$ *справедливо:* $f(p) = (1)$, *если* $p \in \pi$, *и* $f(p) = \emptyset$, *если* $p \in \omega \backslash \pi$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{E}_{\pi}$, $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{N}$. Тогда $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}_{\pi} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$.

По теореме 1 $\mathfrak{F}_1 = \omega R(f_1, \delta_1)$, где δ один – произвольная ΠFR-функция, f один – ωR-функция, имеющая следующее строение: $f(\omega') = \mathfrak{E}_{\pi}$, $f(p) = \mathfrak{E}_{\pi}$, если $p \in \pi$, $f(p) = \emptyset$, если $p \in \omega \backslash \pi$, для любого $p \in \omega$. По теореме 2 $\mathfrak{F}_2 = \omega R(f_2, \delta)$, где f два – ωR-функция, имеющая следующее строение: $f(\omega') = \mathfrak{N}$ и $f(p) = (1)$ для любого $p \in \omega$.

Так как δ один – произвольная ΠFR-функция, то будем полагать, что $\delta_1 = \delta$. Тогда по лемме 12 [3] $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 = \omega R(h, \delta)$, где h – такая ωR-функция, что $h(\omega') = f_1(\omega') \cap f_2(\omega')$ и $h(p) = f_1(p) \cap f_2(p)$ для любого $p \in \omega$. Тогда $h = f$. Таким образом, $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 = \omega R(f, \delta)$ и поэтому $\mathfrak{H} = \omega R(f, \delta)$. Теорема доказана.

Научное исследование проведено под руководством Сорокиной Марины Михайловны, доктора физико-математических наук, профессора, Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского.

References:

1. Bazhanova, E.N., & Vedernikov, V.A. (2017). Ω-rassloennye klassy Fittinga T-grupp. *Sib. elektron. matem. izv. T. 14*, pp.629 – 639.
2. Vedernikov, V.A. (2002). O novyh tipah ω-veernyh klassov Fittinga konechnyh grupp. *Ukrainskij matematicheskij zhurnal, T. 54, № 7*, pp. 897 – 906.
3. Vedernikov, V.A., & Sorokina, M.M. (2002). ω-veernye formacii i klassy Fittinga konechnyh grupp. *Matematicheskie zametki, T. 71, № 1*, pp. 43-60.
4. Vedernikov, V.A., & Sorokina, M.M. (1999). Ω-rassloennye klassy Fittinga konechnyh grupp, *Preprint № 5, BGPU,* Bryansk.
5. Vorob'yov, N.N. (2012). *Algebra klassov konechnyh grupp*. (p.322). Vitebsk: VGU imeni P.M. Masherova.
6. Egorova, V.E. (2008). Kriticheskie neodnoporozhdyonnye total'no kanonicheskie klassy Fittinga konechnyh grupp. *Matematicheskie zametki, T. 83, № 4*, pp. 520 – 527.
7. Kamozina, O.V. (2006). O neodnoporozhdyonnyh ω-veernyh klassah

Fittinga konechnyh grupp. *Matematicheskie zametki*, *T. 79, № 3*, pp. 396 – 408.
8. Putilov, S.V., & Sorkina, M.M. (2018). *Klassy grupp*. (p.100). Bryansk, Izdatel'stvo «Beloberezh'e».
9. Syromolotova, O.V. (2004). Proizvedeniya klassov Fittinga konechnyh grupp. *Matematicheskie zametki, T. 75, № 2*, pp. 269–276.
10. Doerk, K., & Nawkes, T. (1992). *Finite soluble groups*. (p.892). Walter de Gruyter, Berlin – New York.