SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2020 **Issue:** 02 **Volume:** 82

Published: 21.02.2020 **http://T-Science.org**

QR – Issue QR – Article

Gennady Evgenievich Markelov
Bauman Moscow State Technical University
Candidate of Engineering Sciences, associate professor,
corresponding member of International Academy of
Theoretical and Applied Sciences, Moscow, Russia
markelov@bmstu.ru

THE GROUP OF PARALLEL CONNECTED THERMISTORS

Abstract: *A working mathematical model of a technical system was obtained. The technical system involves parallel connection of PTC thermistors. The created mathematical model is sufficiently full, accurate, adequate, productive, and economical. Such a model, when applied, requires less time and costs spent on research and enables efficient use of mathematical modeling tools.*

Key words: *working mathematical model, properties of mathematical models, principles of mathematical modeling.*

Language: *Russian*

Citation: Markelov, G. E. (2020). The group of parallel connected thermistors. *ISJ Theoretical & Applied Science, 02 (82),* 74-77.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-02-82-13 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2020.02.82.13

Scopus ASCC: *2604.*

ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ТЕРМОРЕЗИСТОРОВ

Аннотация: *Получена рабочая математическая модель технической системы. Техническая система включает параллельное соединение терморезисторов с положительным температурным коэффициентом сопротивления. Построенная математическая модель в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности. Применение такой модели сокращает затраты времени и средств на проведение исследования, позволяет рационально использовать возможности математического моделирования.*

Ключевые слова: *рабочая математическая модель, свойства математических моделей, принципы математического моделирования.*

1. Введение

Рассмотрению технических характеристик терморезисторов с положительным температурным коэффициентом сопротивления, основных принципов их работы, способов расчета схем с этими терморезисторами, а также многочисленным примерам практического использования таких приборов посвящена обширная учебная и научная литература.

Целью настоящей работы является разработка в рамках единого подхода рабочей математической модели технической системы. Техническая система включает параллельное соединение терморезисторов с положительным температурным коэффициентом сопротивления.

Зависимость сопротивления R такого терморезистора от его температуры T не является линейной в широком диапазоне температур (см., например, [1]). Однако в сравнительно узком диапазоне температур можно считать, что

$$R(T) = r\left[1+\beta\left(T-T_0\right)\right],$$

где r — сопротивление терморезистора при $T=T_0$; β — положительная постоянная величина.

Единый подход к построению рабочей математической модели, которая в достаточной мере обладает нужными свойствами применительно к конкретному исследованию, изложен в работах [2; 3]. Некоторые свойства математических моделей сформулированы, например, в [4; 5]. В работе [6] приведен пример построения математической модели, в достаточной мере обладающей нужными свойствами применительно к исследованию, некоторые результаты которого опубликованы в работах [7–9]. Особенности внедрения единого подхода к построению математических моделей рассмотрены, например, в [10; 11].

2. Постановка задачи

Рассмотрим параллельное соединение n терморезисторов. Пусть i-й терморезистор является высокотеплопроводным телом, температура T_i которого в начальный момент времени t_0 равна T_0, причем $T_i \le T_1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. На поверхности терморезистора площадью S_i происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой равна T_0, коэффициент теплоотдачи известен и равен α_i. Для сравнительно узкого диапазона температур от T_0 до T_1 считаем, что

$$R_i(T_i) = r_i\left[1 + \beta_i(T_i - T_0)\right],$$

$$C_i(T_i) = c_i\left[1 + \gamma_i(T_i - T_0)\right],$$

где $R_i(T_i)$ и $C_i(T_i)$ — сопротивление и полная теплоемкость i-го терморезистора; r_i и c_i — сопротивление и полная теплоемкость i-го терморезистора при $T_i = T_0$; β_i и γ_i — положительные постоянные величины. Через i-й терморезистор протекает электрический ток, сила которого равна

$$I_i = \frac{U}{r_i\left[1 + \beta_i(T_i - T_0)\right]}, \qquad (1)$$

где U — постоянная разность электрических потенциалов на полюсах i-го элемента.

Пусть в рамках проводимого исследования представляет интерес величина

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i. \qquad (2)$$

Построим рабочую математическую модель объекта исследования, которая в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности.

3. Решение задачи

Для решения поставленной задачи используем полученные в работе [12] результаты. Эти результаты позволяют легко построить иерархию математических моделей данного объекта исследования и определить условия, при выполнении которых можно с относительной погрешностью не более заданного значения δ_0 найти искомую величину I.

Если разности $T_i - T_0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, достаточно малы, то согласно (1) найдем искомую величину по формуле

$$I_0 = U\sum_{i=1}^{n} r_i^{-1}. \qquad (3)$$

Определим условия, при которых применима полученная формула. Для этого рассмотрим установившийся процесс теплообмена. В этом случае согласно выкладкам, приведенным в работе [12], установившееся значение величины I_i найдем по формуле

$$I_i^* = \frac{2U}{r_i\left[1 + \sqrt{1 + 4\beta_i U^2 \alpha_i^{-1} S_i^{-1} r_i^{-1}}\right]},$$

причем для данного диапазона температур

$$\frac{U^2}{\alpha_i S_i r_i (T_1 - T_0)} \le 1 + \beta_i(T_1 - T_0). \qquad (4)$$

Тогда установившееся значение искомой величины равно

$$I_* = \sum_{i=1}^{n} I_i^*. \qquad (5)$$

Для относительной погрешности величины I_0 запишем

$$\delta(I_0) = \left|\frac{I - I_0}{I}\right| = \frac{I_0}{I} - 1 \le \frac{I_0}{I_*} - 1.$$

При выполнении неравенства

$$\frac{I_0}{I_*} - 1 \le \delta_0 \qquad (6)$$

можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (3) для нахождения искомой величины. Следовательно, при выполнении неравенства (6) математическая модель (3) в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности.

Затем определим условия, при которых применима математическая модель (5). Для этого рассмотрим неустановившийся процесс теплообмена. Тогда, учитывая результаты, полученные в работе [12], приходим к задаче Коши

$$\frac{dI_i}{dt} = \frac{\beta_i r_i I_i^2}{c_i U}\,\frac{\alpha_i S_i U - \alpha_i S_i r_i I_i - \beta_i r_i U I_i^2}{\gamma_i U - \gamma_i r_i I_i + \beta_i r_i I_i},$$

$$I_i(t_0) = U r_i^{-1}, \qquad (7)$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$, и найдем момент времени

$$t_i = t_0 + \frac{c_i}{\alpha_i S_i}\left[\frac{\gamma_i}{\beta_i}\left(\frac{r_i I_i^*}{U} - 1 + \delta_0\right)\frac{U}{r_i I_i^*} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{U}{2U - r_i I_i^*} + \frac{\gamma_i}{\beta_i}\,\frac{U - r_i I_i^*}{2U - r_i I_i^*}\,\frac{U}{r_i I_i^*} - 1\right) \times \right.$$

$$\times\ln\left(2-\frac{r_iI_i^*}{U}-\delta_0\right)-\left(\frac{U}{2U-r_iI_i^*}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\gamma_i}{\beta_i}\frac{U-r_iI_i^*}{2U-r_iI_i^*}\frac{U}{r_iI_i^*}\right)\ln\left(\frac{U}{U-r_iI_i^*}\delta_0\right)\right],$$

для которого

$$I_i\left(t_i\right)=\frac{I_i^*}{1-\delta_0}.$$

Очевидно, что при $t\geq t_i$

$$\delta\left(I_i^*\right)=\left|\frac{I_i-I_i^*}{I_i}\right|=1-\frac{I_i^*}{I_i}\leq\delta_0,$$

а значение I_i^* можно с относительной погрешностью не более δ_0 считать равным $I_i\left(t\right)$. Пусть $t_*=\max\limits_{1\leq i\leq n}t_i$, тогда легко показать, что при $t\geq t_*$

$$\delta\left(I_*\right)=\left|\frac{I-I_*}{I}\right|=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(I_i-I_i^*\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}I_i}\leq\delta_0.$$

Следовательно, можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (5) для нахождения искомой величины.

Если не выполнено условие (6), то математическая модель (5) при $t\geq t_*$ в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности.

Разработка новой математической модели при формировании иерархии математических моделей объекта исследования может привести к уточнению найденных ранее условий применимости построенных математических моделей. Действительно, используя полученные результаты, можно уточнить условие применимости формулы (3). Для этого найдем момент времени

$$t_i=t_0+\frac{c_i}{\alpha_iS_i}\left[\left(\frac{\gamma_i}{\beta_i}\frac{U-r_iI_i^*}{2U-r_iI_i^*}\frac{U}{r_iI_i^*}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{U}{2U-r_iI_i^*}-1\right)\ln\left(1+\frac{r_iI_i^*}{U}\delta_0\right)-$$

$$-\left(\frac{U}{2U-r_iI_i^*}+\frac{\gamma_i}{\beta_i}\frac{U-r_iI_i^*}{2U-r_iI_i^*}\frac{U}{r_iI_i^*}\right)\times$$

$$\left.\times\ln\left(1-\frac{r_iI_i^*}{U-r_iI_i^*}\delta_0\right)-\frac{\gamma_i}{\beta_i}\delta_0\right],$$

для которого

$$I_i\left(t_i\right)=\frac{U}{r_i\left(1+\delta_0\right)}.$$

Очевидно, что при $t\leq t_i$

$$\delta\left(Ur_i^{-1}\right)=\left|\frac{I_i-Ur_i^{-1}}{I_i}\right|=\frac{U}{r_iI_i}-1\leq\delta_0,$$

а значение Ur_i^{-1} можно с относительной погрешностью не более δ_0 считать равным $I_i\left(t\right)$. Пусть $t^*=\min\limits_{1\leq i\leq n}t_i$, тогда легко показать, что при $t\leq t^*$

$$\delta\left(I_0\right)=\left|\frac{I-I_0}{I}\right|=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(Ur_i^{-1}-I_i\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}I_i}\leq\delta_0.$$

Следовательно, можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (3) для нахождения искомой величины.

Если выполнено условие (6) или $t\leq t^*$, то математическая модель (3) в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности.

4. Результаты

Построение иерархии математических моделей объекта исследования позволяет выявить рабочую математическую модель, которая в достаточной мере обладает нужными свойствами применительно к конкретному исследованию.

Действительно, если выполняется неравенство (6) или в рамках проводимого исследования $t\leq t^*$, то математическую модель (3) считаем рабочей. Если не выполнено условие (6), а временной интервал от t_0 до t_* можно в рамках проводимого исследования не рассматривать, то выбираем математическую модель (5) как рабочую, иначе — математическую модель (2), (7). Приведенные утверждения справедливы при выполнении неравенства (4).

5. Заключение

Таким образом, в рамках единого подхода сформулированы применительно к данному исследованию утверждения. Они позволяют установить рабочую математическую модель технической системы, которая включает параллельное соединение терморезисторов с положительным температурным коэффициентом сопротивления. Построенная математическая модель в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности.

Очевидно, что применение такой математической модели не только сокращает затраты времени и средств на проведение исследования, но и позволяет рационально использовать возможности математического моделирования.

References:

1. Macklen, E. D. (1979). *Thermistors*. Ayr: Electrochemical Publications Ltd.
2. Markelov, G. E. (2015). On Approach to Constructing a Working Mathematical Model. *ISJ Theoretical & Applied Science, 04 (24)*, 287–290. Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS*04(24)52 Doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.04.24.52
3. Markelov, G. E. (2015). Constructing a Working Mathematical Model. *ISJ Theoretical & Applied Science, 08 (28)*, 44–46. Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-08-28-6 Doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.08.28.6
4. Myshkis, A. D. (2011). *Elements of the Theory of Mathematical Models* [in Russian]. Moscow: URSS.
5. Zarubin, V. S. (2010). *Mathematical Modeling in Engineering* [in Russian]. Moscow: Izd-vo MGTU im. N. E. Baumana.
6. Markelov, G. E. (2012). Peculiarities of Construction of Mathematical Models. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii, No. 4*, http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/150.html
7. Markelov, G. E. (2000). Effect of initial heating of the jet-forming layer of shaped-charge liners on the ultimate elongation of jet elements. *J. Appl. Mech. and Tech. Phys., 41, No. 2*, 231–234.
8. Markelov, G. E. (2000). Effect of initial heating of shaped charge liners on shaped charge penetration. *J. Appl. Mech. and Tech. Phys., 41, No. 5*, 788–791.
9. Markelov, G. E. (2000). *Influence of heating temperature on the ultimate elongation of shaped-charge jet elements*. Proc. of the 5th Int. Conf. “Lavrentyev Readings on Mathematics, Mechanics and Physics”. (p. 170). Novosibirsk: Lavrentyev Institute of Hydrodynamics.
10. Markelov, G. E. (2015). Particular Aspects of Teaching the Fundamentals of Mathematical Modeling. *ISJ Theoretical & Applied Science, 05 (25)*, 69–72. Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS*05(25)14 Doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.05.25.14
11. Markelov, G. E. (2016). Teaching the Basics of Mathematical Modeling. Part 2. *ISJ Theoretical & Applied Science, 01 (33)*, 72–74. Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-01-33-15 Doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2016.01.33.15
12. Markelov, G. E. (2019). A Working Mathematical Model of a Technical System Element. *ISJ Theoretical & Applied Science, 01 (69)*, 52–55. Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-01-69-11 Doi: https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2019.01.69.11