Impact Factor:

ISRA (India)	= **4.971**	**SIS** (USA)	= **0.912**	**ICV** (Poland)	= **6.630**
ISI (Dubai, UAE)	= **0.829**	**РИНЦ** (Russia)	= **0.126**	**PIF** (India)	= **1.940**
GIF (Australia)	= **0.564**	**ESJI** (KZ)	= **8.716**	**IBI** (India)	= **4.260**
JIF	= **1.500**	**SJIF** (Morocco)	= **5.667**	**OAJI** (USA)	= **0.350**

QR – Issue QR – Article

SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal

Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2020 **Issue:** 03 **Volume:** 83

Published: 30.03.2020 http://T-Science.org

Roman Yurevich Kostyuchenko
Omsk State Pedagogical University
Associate Professor, Candidate of Pedagogical Sciences
Associate professor of Mathematics and Methodology of Teaching Mathematics Chair

EXPONENTIAL EQUATIONS AND THEIR BASIC TYPES AS AN ELEMENT OF THE CONTENT OF TEACHING MATHEMATICS IN SENIOR HIGH SCHOOL

Abstract: *Exponential equations are a traditional component of the meaningfully-methodical line of equations, in equations and their systems for a school mathematics course. The method of teaching students' exponential equations follows the conformities of an actual teaching methods of equations and maps the special aspects of equations of this type. So, from our point of view, the main issues of teaching exponential equations, which is occurred in senior high school, are related to the content component of the methodology, rather than to its other components: target, procedural, subject-personal. Therefore, the article substantiates the denotation of «Exponential equation» in the context of school education. And, since the denotation is revealed through classification, the author provides a tried through practice cleavage of exponential equations into five groups, based on differences in types. The condition used as the basis for division by type is proceeded from the quantities of numbers in the base of the degree that can/cannot be represented as a degree with a rational exponent. All theoretical conclusions are illustrated by appropriate examples.*

Key words: *Teaching methods of mathematics, teaching mathematics, teaching mathematics in senior high school, transcendental equation, exponential equations, solution of exponential equations, types of exponential equations.*

Language: *Russian*

Citation: Kostyuchenko, R. Y. (2020). Exponential equations and their basic types as an element of the content of teaching mathematics in senior high school. *ISJ Theoretical & Applied Science, 03 (83),* 165-174.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-03-83-35 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2020.03.83.35

Scopus ASCC: *3304.*

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ОСНОВНЫЕ ВИДЫ КАК ЭЛЕМЕНТ СОДЕРЖАНИЯ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В СТАРШИХ КЛАССАХ

Аннотация: *Показательные уравнения – традиционная для школьного курса математики составляющая содержательно-методической линии уравнений, неравенств и их систем. Методика обучения учащихся показательным уравнениям подчиняется закономерностям конкретной методики обучения уравнениям и отражает специфические особенности уравнений данного вида. Так, на наш взгляд, основные вопросы обучения показательным уравнениям, которое осуществляется в старших классах, связаны с содержательным компонентом методики, нежели с её другими компонентами: целевым, процессуальным, субъектно-личностным. Поэтому в статье обосновывается объем понятия «Показательное уравнение» в контексте школьного обучения. И, поскольку объем понятия раскрывается через классификацию, то автором приводится проверенное на практике деление показательных уравнений на пять групп, основанное на различии по видам. Признак, положенный в основу деления по видам, исходит из количества чисел в основании степени, которые можно/нельзя представить в виде степени с рациональным показателем. Все теоретические выводы иллюстрируются соответствующими примерами.*

Ключевые слова: *методика обучения математике, обучение математике, обучение математике в старших классах, трансцендентные уравнения, показательные уравнения, решение показательных уравнений, виды показательных уравнений.*

Введение

Уравнения занимают значимую часть содержания школьного математического образования, их изучение в методике обучения математике рассматривается в рамках отдельной содержательно-методической линии. Как правило, показательные уравнения, наряду с логарифмическими и тригонометрическими, изучаются в старшей школе. Это обуславливается как психологическими особенностями учащихся, так и логикой развития математики, изучаемой в школе.

Вполне очевидно, что показательные уравнения могут выступать и в качестве самостоятельного объекта изучения, и в качестве средства изучения других тем школьного курса математики, применения в повседневной жизни и при изучении других учебных предметов. В этой связи в примерной основной образовательной программе среднего общего образования говорится, что выпускник уже на базовом уровне получит возможность научиться «составлять и решать уравнения, системы уравнений и неравенств при решении задач других учебных предметов; использовать уравнения и неравенства для построения и исследования простейших математических моделей реальных ситуаций или прикладных задач» [12, с. 103].

Результаты исследования и их обсуждение

В основной школе, особенно в 5-6 классах, основное внимание учителя при изучении уравнений акцентируется на формах обучения. В дальнейшем изучении математики, по мере взросления школьников и усложнения теоретического материала, акцент в подготовке учителя к урокам математики с подбора форм обучения смещается на отбор содержания обучения. Причем в старших классах, на наш взгляд, именно содержание обучения вслед за его целями предопределяет формы обучения. Так, при методическом отборе заданий по обучению показательным уравнениям учитель пытается подобрать задания, которые удовлетворяют одновременно требованиям минимальности и полноты, при этом их решение должно математически обосновано и одновременно доступно учащимся. В России в Федеральном государственном образовательном стандарте среднего общего образования в отношении уравнений говорится, что учащиеся должны владеть на базовом уровне «стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем» [13, с. 16], а на профильном уровне, в дополнение к сказанному, иметь «сформированные представления о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений» [13, с. 16].

Отбор содержания обучения уравнениям осуществляется исходя из того, на каком уровне происходит их изучение – ознакомительном, репродуктивном (добиться понимания и воспроизведения конкретного программного материала и т.п.) или итоговом (сформировать знания и умения в соответствии с требованиями к математической подготовке учащихся) [9, с. 69-70]. Как мы уже отмечали выше, для учителя старших классов важно иметь представление о содержании обучения уравнениям на итоговом уровне, а подбор упражнений для предыдущих уровней, хотя и важен в методическом плане, но все же еще во многом зависит и от степени подготовленности класса. Поэтому в статье уделим особое внимание раскрытию объема понятия «Показательное уравнение». Напомним, объем понятия раскрывается посредством классификации.

Подобрать основание, критерий для классификации показательных уравнений, удовлетворяющий всем правилам классификации, при этом удобный для практики обучения достаточно сложно. Общего метода решения показательных уравнений в математике не существует. Наиболее удачным, на наш взгляд, стало деление показательных уравнений на группы, основанное на их различии по видам. Признак, положенный в основу деления по видам, исходит из количества чисел в основании степени, которые можно/нельзя представить в виде степени с рациональным показателем.

I. Уравнения вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$ и сводящиеся к ним

Уравнения, представленного выше вида, в учебнике [11] называют показательным уравнением. В других учебниках показательными уравнениями называют уравнения, в которых неизвестное содержится в показателе степени [2, с. 216; 10, с. 77]. В научно-методической литературе показательными называют уравнения, неизвестное которого входит только в показатель степени [5, с. 24].

В основе решения показательных уравнений лежит следующая теорема: «Если $a > 0$ *и* $a \neq 1$, то уравнения $a^{f(x)} = a^{f(x)}$ и $f(x) = g(x)$ равносильны» [4, с.72].

Пример 1. Решить уравнение $3^{2x+3}=3^{x+7}$.

Решение. Это уравнение равносильно уравнению $2x+3=x+7$, единственным корнем которого является $x=4$.

Ответ: $x=4$.

Пример 2. Решить уравнение $2^{2x-4}=64$ [11, с. 94].

Решение. Представив 64 как 2^6, перепишем заданное уравнение в виде $2^{2x-4}=2^6$. Откуда $2x-4=6$, поэтому $x=5$.

Ответ: $x=5$.

Как правило, решение данных и подобных им уравнений не вызывает у учащихся особых затруднений. Поэтому на материале уравнений данной группы можно рекомендовать организацию повторения решения алгебраических уравнений. Например:

Пример 3. Решить уравнение $3^{|x-1|}=3^{|x+3|}$ [10, с. 78-79]. Ответ: $x=-1$.

Здесь решение показательного уравнения сводится к решению уравнения с модулем.

Пример 4. Решить уравнение $4^{2\sqrt{x}}=2^{2x-6}$. Ответ: $x=9$.

Здесь решение показательного уравнения сводится к решению иррационального уравнения, решение которого методом возведения в квадрат предполагает обязательную проверку найденных корней.

Пример 5. Решить уравнение $32^{\frac{x+5}{x-7}}=0{,}25\cdot128^{\frac{x+17}{x-3}}$. Ответ: $x=10$.

Здесь решение показательного уравнения сводится к решению дробно-рационального уравнения. Как показывает наш опыт, на данном примере удобно вспомнить порядок действий, поскольку некоторые ученики ошибаются, умножая вначале 0,25 на 128. В этом случае у них получается ошибочный ответ x=13.

В предлагаемой нами первой группе уравнений следует рассмотреть и уравнение, характерное для показательных уравнений, решение которого основано на свойствах степени:

Пример 6. Решить уравнение $5^{x+1}+5^x+5^{x-1}=155$.

Решение. Традиционная последовательность равносильных преобразований здесь будет следующей:

$$5^{x+1}+5^x+5^{x-1}=155,$$
$$5^{x-1}\left(5^2+5^1+1\right)=155,$$
$$5^{x-1}\cdot31=155,$$
$$5^{x-1}=5,$$
$$x-1=1,$$
$$x=2.$$

Однако многие современные ученики предпочитают несколько иную последовательность равносильных преобразований:

$$5^{x+1}+5^x+5^{x-1}=155,$$
$$5^x\cdot5+5^x+5^x\cdot\frac{1}{5}=155,$$
$$5^x\left(5+1+\frac{1}{5}\right)=155,$$
$$5^x\cdot\frac{31}{5}=155,$$
$$5^x=25,$$
$$5^x=5^2,$$
$$x=2,$$

Ответ: $x=2$.

II. Уравнения вида $a^{f(x)}=b^{f(x)},\ a>0,\ a\neq1$ и сводящиеся к ним, где *a* и *b* нельзя представить в виде степени с одинаковым основанием и рациональным показателем

Пример 7. Решить уравнение $3^x=7^x$ [10, с. 78].

Решение. Так как $7^x\neq0$, то разделим обе части исходного уравнения на 7^x, Получим $\frac{3^x}{7^x}=1$, откуда $\left(\frac{3}{7}\right)^x=1$, $\left(\frac{3}{7}\right)^x=\left(\frac{3}{7}\right)^0$, $x=0$.

Ответ: $x=0$.

Заметим, это уравнение одно из «стандартных» для второй, выделенной нами группы. Метод его решения должен быть освоен учащимися на уровне навыка. В этом случае можно будет перейти к решению более сложных уравнений, например:

Пример 8. Решить уравнение $3\cdot2^{x+1}+2\cdot5^{x-2}=5^x+2^{x-2}$ [10, с. 78].

Решение. Последовательность равносильных преобразований здесь будет следующей:

$3\cdot 2^{x+1}+2\cdot 5^{x-2}=5^x+2^{x-2}$,

$3\cdot 2^{x+1}-2^{x-2}=5^x-2\cdot 5^{x-2}$,

$2^{x-2}\left(3\cdot 2^3-1\right)=5^{x-2}\left(5^2-2\right)$,

$2^{x-2}\cdot 23=5^{x-2}\cdot 23$,

$2^{x-2}=5^{x-2}$,

$\dfrac{2^{x-2}}{5^{x-2}}=1$,

$\left(\dfrac{2}{5}\right)^{x-2}=\left(\dfrac{2}{5}\right)^{0}$,

$x-2=0$,

$x=2$.

Ответ: $x=2$.

В двух предыдущих примерах мы применяли свойство степени $\dfrac{a^c}{b^c}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^c,\ a>0,\ b>0$. Аналогичное ему будет $a^c\cdot b^c=(ab)^c,\ a>0,\ b>0$. Поэтому следует рассмотреть уравнения на применение этого свойства:

Пример 9. Решить уравнение $2^{3x}\cdot 3^x=576$ [2, с. 216].

Решение. Так как $2^{3x}=\left(2^3\right)^x=8^x$, $576=24^2$, то уравнение можно записать в виде $8^x\cdot 3^x=24^2$, откуда $24^x=24^2$, $x=2$.

Ответ: $x=2$.

Пример 10. Решить уравнение $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\dfrac{9}{8}\right)^x=2\dfrac{10}{27}$.

Решение. Воспользовавшись свойством $a^c\cdot b^c=(ab)^c,\ a>0,\ b>0$ для левой части уравнения, получим $\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{9}{8}\right)^x=2\dfrac{10}{27}$, откуда $\left(\dfrac{3}{4}\right)^x=\dfrac{64}{27}$, $\left(\dfrac{3}{4}\right)^x=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-3}$, $x=-3$.

Ответ: $x=-3$.

Последний пример примечателен тем, что его решение несложно. Однако многие учащиеся замечают, что числитель второй дроби есть квадрат тройки, а её знаменатель – куб двойки. Заменив таким образом числитель и знаменатель второй дроби, и заметив, что числители и знаменатели всех дробей представляют собой степени двойки или тройки, учащиеся пытаются найти преобразования, упрощающие уравнение, что делает его достаточно сложным для решения.

В данной группе следует рассмотреть уравнение вида $a^{f(x)}=b,\ a>0,\ a\neq 1$, которое при $f(x)=x$ называют простейшим показательным уравнением [1, с. 164; 3, с. 229]. В зависимости от b это уравнение всегда имеет либо один корень ($b>0$), либо не имеет корней ($b\leq 0$). Причем его решение обучающимися осуществляется тремя различными методами. Покажем это:

Пример 11. Решить уравнение $2^x=3$.

Решение.

Метод 1. Метод уравнивания показателей. Он основан на уже упомянутой теореме о том, что уравнение $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x)=g(x)$, где a – положительное число, отличное от 1 [11, с. 104-105].

Последовательность равносильных преобразований здесь будет следующей:

$2^x=3$,

$2^x=2^{\log_2 3}$,

$x=\log_2 3$.

Метод 2. Основан на определении логарифма.

Так, с одной стороны, корень уравнения $2^x=3$ есть такое число x, в которое надо возвести число 2, чтобы получилось число 3, с другой стороны, $\log_2 3$ есть такое число, в которое надо возвести число 2, чтобы получилось число 3. Сравнивая два определения, получаем, что $x=\log_2 3$.

Метод 3. Логарифмирование.

Так как левая и правая части уравнения $2^x=3$ положительны, то их можно прологарифмировать, получим уравнение, равносильное данному:

$2^x=3$,

$\log_2 2^x=\log_2 3$,

$x\cdot\log_2 2=\log_2 3$,

$x\cdot 1=\log_2 3$,

$x=\log_2 3$.

Ответ: $x=\log_2 3$.

Пример 12. Решить уравнение $5^x = -25$.

Решение. Так как $5^x > 0$ для любых x, а $-25 < 0$, то уравнение не имеет корней.

Ответ: Нет корней.

Заметим, что решение уравнения в примере 11 предполагает знание учащихся логарифма. Однако логарифмы в школе часто изучаются после показательных уравнений. Здесь, понятно, мы сталкиваемся с методической трудностью: с одной стороны, есть простейшее показательное уравнение, которое имеет корень, с другой стороны – недостаточно теоретических знаний, чтобы этот корень записать. Как вариант её разрешения, возможно с помощью графической иллюстрации (графика показательной функции) показать, что корень должен существовать, причем единственный, и в дальнейшем вернуться к решению уравнений данного вида. А при обобщающем повторении данная трудность исчезает, что очевидно.

Дальнейшее усложнение уравнений этой группы связано с усложнением тождественных преобразований, осуществляемых над левой и/или правой частью уравнения.

III. Уравнения вида $k_1 a^{2f(x)} + k_2 a^{f(x)} + k_3 = 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ k_1 \neq 0$ (квадратные относительно $a^{f(x)}$), в более общем случае – уравнения вида $g\left(a^{f(x)}\right) = 0,\ a > 0,\ a \neq 1,$ где g – рациональная функция от аргумента $a^{f(x)}$

Пример 13. Решить уравнение $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$.

Решение. Обозначим $2^x = t$, тогда исходное уравнение запишется в виде $t^2 - 6t + 8 = 0$, откуда $t = 2$ или $t = 4$. Возвращаясь к переменной x, получим $2^x = 2$ или $2^x = 4$, откуда $x_1 = 1$ или $x_2 = 2$.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Основные сложности решения уравнений этой группы связаны с приведением исходного уравнения к рациональному (относительно переменной $a^{f(x)}$), либо с решением рационального уравнения. Приведем примеры на первый и второй случай:

Пример 14. Решить уравнение $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

Решение. На первый взгляд, слагаемые в левой части уравнения из общего имеют одинаковую форму записи и совпадающие числа, но выражения содержат разные знаки и ввести новую переменную не представляется возможным. Однако применим к одному из выражений, стоящему под знаком радикала, преобразование, характерное для иррациональных выражений:

$$2-\sqrt{3} = \frac{2-\sqrt{3}}{1} = \frac{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})} = \frac{2^2-(\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})} = \frac{1}{(2+\sqrt{3})}.$$

Тогда, с учетом приведенного тождества, решение будет следующим:

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4,$$

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^x = 4,$$

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \frac{1}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x} = 4.$$

Пусть $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = t$, тогда уравнение примет вид $t + \frac{1}{t} = 4$, откуда $t^2 - 4t + 1 = 0$, $t = 2 \pm \sqrt{3}$.

Возвращаясь к переменной x, получим $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2 \pm \sqrt{3}$, откуда $x = \pm 2$.

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

Пример 15. Решить уравнение $\frac{1}{4^x} + \frac{1}{\left(2^x+1\right)^2} = \frac{5}{4}$.

Решение. Очевидно, что при $2^x = t$ уравнение можно переписать в виде $\frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t+1)^2} = \frac{5}{4}$. Решение этого дробно-рационального уравнения «стандартным» методом (сложение алгебраических дробей, преобразование от дробно-рационального к рациональному, приведение подобных слагаемых) приведет к рациональному уравнению четвертой степени $5t^4 + 10t^3 - 3t^2 - 8t - 4 = 0$, имеющее два корня $t=-2$ и $t=1$, которые находятся достаточно сложно.

Поступим иначе: выделим полный квадрат в левой части уравнения. Для этого выполним преобразование, равносильное для данного уравнения: к левой и правой части уравнения прибавим одно и тоже выражение $\frac{-2}{t(t+1)}$. Тогда решение будет следующим:

$$\frac{1}{t^2}+\frac{1}{(t+1)^2}=\frac{5}{4},$$

$$\left(\frac{1}{t}\right)^2-\frac{2}{t(t+1)}+\left(\frac{1}{t+1}\right)^2=\frac{5}{4}-\frac{2}{t(t+1)},$$

$$\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)^2=\frac{5}{4}-\frac{2}{t(t+1)},$$

$$\left(\frac{1}{t(t+1)}\right)^2=\frac{5}{4}-\frac{2}{t(t+1)}.$$

Пусть $\frac{1}{t(t+1)}=z$, тогда

$$z^2=\frac{5}{4}-2z,$$

$$4z^2+8z-5=0,$$

$z=-2{,}5$ или $z=0{,}5$.

Возвращаясь к переменной t, получим:

$\frac{1}{t(t+1)}=-2{,}5$ или $\frac{1}{t(t+1)}=0{,}5$.

Первое уравнение не имеет действительных корней, второе уравнение имеет корни $t=-2$ или $t=1$. Возвращаясь к переменной x, получим $2^x=-2$ или $2^x=1$. Первое уравнение не имеет действительных корней, второе уравнение имеет единственный корень $x=0$.

Ответ: $x=0$.

IV. Однородные уравнения (второй степени и выше)

С формализованным понятием однородного уравнения учащиеся, как правило, встречаются при изучении тригонометрии. Так при решении тригонометрических уравнений вводится определением, что уравнение вида $a\sin^2 x+b\sin x\cdot\cos x+c\cos^2 x=0$ есть однородное тригонометрическое уравнение 2-ой степени, и рассматриваются методы его решения.

Однако на содержательном уровне однородные уравнения могут встретиться гораздо раньше – при изучении дробно-рациональных уравнений. Напомним, что однородным уравнением второй степени относительно переменных a и b называется уравнение вида $k_1a^2+k_2ab+k_3b^2=0$, где, по крайней мере, два коэффициента k_i не равны нулю. Например, полагая $a=2^x$, $b=5^x$, $k_1=5$, $k_2=8$, $k_3=-4$ получим однородное показательное уравнение второй степени $5\cdot 2^{2x}+8\cdot 10^x-4\cdot 5^{2x}=0$.

Соответственно, $k_1a^3+k_2a^2b+k_3ab^2+k_4b^3=0$ – однородное уравнение 3-ей степени относительно a и b, $k_1a^4+k_2a^3b+k_3a^2b^2+k_4ab^3+k_5b^4=0$ – однородное уравнение 4-ой степени и т.д. Метод решения однородных уравнений – деление на любое слагаемое, и далее – замена переменной, которая приводит к рациональному уравнению.

В школьном курсе математики наиболее распространены однородные уравнения первой и второй степеней.

Пример 16. Решить уравнение $5\cdot 4^x+8\cdot 10^x-4\cdot 25^x=0$.

Решение. Это однородное показательное уравнение второй степени относительно переменных 2^x и 5^x. Поскольку $25^x\neq 0$, то обе части уравнения можно разделить на 25^x:

$$5\cdot 4^x+8\cdot 10^x-4\cdot 25^x=0,$$

$$5\cdot\frac{4^x}{25^x}+8\cdot\frac{10^x}{25^x}-4\cdot\frac{25^x}{25^x}=0,$$

$$5\cdot\left(\frac{4}{25}\right)^x+8\cdot\left(\frac{10}{25}\right)^x-4=0,$$

$$5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}+8\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x-4=0.$$

Пусть $\left(\frac{2}{5}\right)^x=t$, тогда уравнение можно переписать в виде:

$$5t^2+8t-4=0,$$

$t=-2$ или $t=\frac{2}{5}$.

Возвращаясь к переменной x, получим:

$\left(\frac{2}{5}\right)^x=-2$ или $\left(\frac{2}{5}\right)^x=\frac{2}{5}$.

Первое уравнение не имеет действительных корней, второе уравнение имеет единственный корень $x=1$.

Ответ: $x=1$.

Заметим, что выше в статье мы уже встречались с однородными показательными уравнениями. Так, в примере 7 рассматривалось решение уравнения $3^x = 7^x$, которое является однородным показательным уравнением первой степени. Метод решения таких уравнений – деление на любое слагаемое, что мы и сделали выше на содержательном (а не на формализованном) уровне.

Рассмотрим решение еще одного однородного уравнения. В качестве примера решим неполное однородное показательное уравнение третьей степени:

Пример 17. Решить уравнение $4\cdot 8^x + 2^x\cdot 9^x - 15\cdot 27^x = 0$.

Решение. Чтобы понять, что данное уравнение является однородным, можно переписать его в виде $4\cdot\left(2^x\right)^3 + 0\cdot\left(2^x\right)^2\cdot\left(3^x\right)^1 + 1\cdot\left(2^x\right)^1\cdot\left(3^x\right)^2 - 15\cdot\left(3^x\right)^3 = 0$. Тогда становится видно, что это однородное уравнение третьей степени относительно переменных 2^x и 3^x, причем это уравнение неполное, поскольку коэффициент при $\left(2^x\right)^2\cdot\left(3^x\right)^1$ равен 0.

Для решения оставим уравнение в исходном виде и, учитывая то, что $27^x \neq 0$, разделим обе его части на 27^x:

$$4\cdot 8^x + 2^x\cdot 9^x - 15\cdot 27^x = 0,$$

$$4\cdot\frac{8^x}{27^x} + \frac{2^x\cdot 9^x}{27^x} - 15\cdot\frac{27^x}{27^x} = 0,$$

$$4\cdot\left(\frac{8}{27}\right)^x + \left(\frac{2\cdot 9}{27}\right)^x - 15\cdot 1 = 0,$$

$$4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 15 = 0.$$

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$, тогда уравнение можно переписать в виде:

$$4t^3 + t - 15 = 0,$$

$$(2t-3)\left(2t^2 + 3t + 5\right) = 0,$$

$$t = \frac{3}{2}.$$

Возвращаясь к переменной x, получим:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2},$$

$$x = -1.$$

Ответ: $x = -1$.

V. Показательно-степенные уравнения

Показательно-степенными уравнениями называются уравнения, в которых неизвестное находится и в основании, и в показателе степени.

Уравнения данной группы достаточно сложные, их решение предполагает хорошую математическую подготовку учащихся. Сложность в решении показательно-степенных уравнений обусловлена и тем, что в математике выражение u^v определяется не для всех действительных чисел. Подробно об этом говорится в статье академика А.Н. Колмогорова [6]. Для учащихся, на наш взгляд, удобной будет следующая форма для запоминания области существования выражения u^v:

$u > 0,\ v$ – *любое*;

$u = 0,\ v > 0$;

$u < 0,\ v$ – *целое*.

В остальных случаях выражение u^v не имеет смысла.

Рассматриваются два вида показательно-степенных уравнений.

1. $(a(x))^{f(x)} = (a(x))^{g(x)}$. Решение такого уравнения на области определения сводится к совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ a(x) = 1, \\ a(x) = 0, \\ a(x) = -1,\ f(x)\ и\ g(x) - целые,\ одной\ чётности. \end{array}\right.$$

Пример 18. Решить уравнение $(2-0{,}5x)^{x^2-6} = (2-0{,}5x)^{4x-1}$.

Решение.

а) Рассмотрим случай, когда равны показатели степеней:

$$x^2 - 6 = 4x - 1$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$x = -1$ или $x = 5$.

Проверим (подстановкой), принадлежат ли эти значения области определения исходного уравнения:

При $x = -1$:

$$(2 - 0{,}5\cdot(-1))^{(-1)^2-6} = (2 - 0{,}5\cdot(-1))^{4\cdot(-1)-1},$$

$2{,}5^{-5} = 2{,}5^{-5}$ – *верно*. Значит $x = -1$ – корень уравнения.

При $x = 5$:

$$(2 - 0{,}5\cdot 5)^{5^2-6} = (2 - 0{,}5\cdot 5)^{4\cdot 5-1},$$

$(-0{,}5)^{19} = (-0{,}5)^{19}$ – *верно*. Значит $x = 5$ – корень уравнения.

б) Рассмотрим случай, когда основание степеней равно 1:

$2-0{,}5x=1$,

$x=2$.

Проверка (подстановкой):

При $x=2$:

$$\left(2-0{,}5\cdot 2\right)^{2^2-6}=\left(2-0{,}5\cdot 2\right)^{4\cdot 2-1},$$

$1^{-2}=1^{7}$ – *верно*. Значит $x=2$ – корень уравнения.

в) Рассмотрим случай, когда основание степеней равно 0:

$2-0{,}5x=0$,

$x=4$.

Проверка (подстановкой):

При $x=4$:

$$\left(2-0{,}5\cdot 4\right)^{4^2-6}=\left(2-0{,}5\cdot 4\right)^{4\cdot 4-1},$$

$0^{10}=0^{15}$ – *верно*. Значит $x=4$ – корень уравнения.

г) Рассмотрим случай, когда основание степеней равно -1:

$2-0{,}5x=-1$,

$x=6$.

Проверка (подстановкой):

При $x=6$:

$$\left(2-0{,}5\cdot 6\right)^{6^2-6}=\left(2-0{,}5\cdot 6\right)^{4\cdot 6-1},$$

$(-1)^{30}=(-1)^{25}$ – *неверно*. Значит $x=6$ не является корнем уравнения.

Ответ: $x_1=-1$, $x_2=5$, $x_3=2$, $x_4=4$.

2. $\left(a(x)\right)^{f(x)}=\left(b(x)\right)^{f(x)}$. Решение такого уравнения на области определения сводится к совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} a(x)=b(x), \\ f(x)=0. \end{array}\right.$$

Пример 19. Решить уравнение $\left(\dfrac{x-4}{x}\right)^{x^2+3x-10}=\left(\dfrac{2x+10}{x+4}\right)^{x^2+3x-10}$.

Решение.

а) Рассмотрим случай, когда равны основания степеней:

$$\frac{x-4}{x}=\frac{2x+10}{x+4},$$

$(x-4)(x+4)=x(2x+10)$,

$x^2+10x+16=0$,

$x=-8$ или $x=-2$.

Проверим (подстановкой), принадлежат ли эти значения области определения исходного уравнения:

При $x=-8$:

$$\left(\frac{(-8)-4}{(-8)}\right)^{(-8)^2+3\cdot(-8)-10}=\left(\frac{2\cdot(-8)+10}{(-8)+4}\right)^{(-8)^2+3\cdot(-8)-10}$$

$\left(\dfrac{3}{2}\right)^{30}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{30}$ – *верно*. Значит $x=-8$ – корень уравнения.

При $x=-2$:

$$\left(\frac{(-2)-4}{(-2)}\right)^{(-2)^2+3\cdot(-2)-10}=\left(\frac{2\cdot(-2)+10}{(-2)+4}\right)^{(-2)^2+3\cdot(-2)-10}$$

$(3)^{-12}=(3)^{-12}$ – *верно*. Значит $x=-2$ – корень уравнения.

б) Рассмотрим случай, когда показатель степени равен нулю:

$x^2+3x-10=0$,

$x=-5$ или $x=2$.

Проверим (подстановкой), принадлежат ли эти значения области определения исходного уравнения:

При $x=-5$:

$$\left(\frac{(-5)-4}{(-5)}\right)^{(-5)^2+3\cdot(-5)-10}=\left(\frac{2\cdot(-5)+10}{(-5)+4}\right)^{(-5)^2+3\cdot(-5)-10}$$

$(1{,}8)^0=(0)^0$ – *выражение не имеет смысла*.

Значит $x=-5$ не является корнем уравнения.

При $x=2$:

$$\left(\frac{2-4}{2}\right)^{2^2+3\cdot 2-10}=\left(\frac{2\cdot 2+10}{2+4}\right)^{2^2+3\cdot 2-10}$$

$(-1)^0=\left(\dfrac{7}{3}\right)^0$ – *верно*. Значит $x=2$ – корень уравнения.

Ответ: $x_1=-8$, $x_2=-2$, $x_3=2$.

В заключение разберем решение еще одного уравнения, непривычного для школьников в теме «показательные уравнения», однако присутствующие в содержании школьного математического образования.

Пример 20. Решить уравнение $\sqrt[x]{81}+84\sqrt[x]{9}+3^5=0$.

Решение. Как отмечается при решении подобного уравнения, «заметим, что x – показатель корня, поэтому x может принимать только натуральные значения, начиная с числа 2. Значит речь идет об отыскании натуральных корней уравнения» [11, с. 105].

Преобразуем уравнение к виду

$$9^{\frac{2}{x}}+84\cdot 9^{\frac{1}{x}}+243=0,$$

сделаем замену $9^{\frac{1}{x}}=t$, тогда

$$t^2+84t+243=0$$

$t=3$ или $t=81$.

Откуда, возвращаясь к переменной x, получим:

$9^{\frac{1}{x}}=3$ или $9^{\frac{1}{x}}=81$. Первое уравнение имеет единственный корень $x=2$, второе уравнение имеет единственный корень $x=\frac{1}{2}$.

Поскольку x – натуральное число, то корнем исходного уравнения является только $x=2$.

Ответ: $x=2$.

Заключение

Представленное выше уравнение содержит операцию, обратную операции возведения в степень – извлечение корня. Для возведения в степень существуют две обратных операции: первая – извлечение корня, вторая – логарифмирование. В содержательно-методической линии уравнений и неравенств школьного курса математики эти операции находят свое воплощение в изучении соответственно иррациональных и логарифмических уравнений, неравенств. О методике обучения иррациональным уравнениям и неравенствам мы уже говорили ранее в своих статьях [7; 8], а методические аспекты обучения логарифмическим уравнениям – материал следующего номера журнала.

References:

1. (2009). *Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 10 klass: uchebnik dlya obshcheobrazovatel'nyh uchrezhdenij: bazovyj i profil'nyj urovni*. [S.M. Nikol'skij, M.K. Potapov, N.N. Reshetnikov, A.V. SHevkin]. – 8-e izd. (p.430). Moscow: Prosveshchenie.
2. (2011). *Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 10 klass: uchebnik dlya obshcheobrazovatel'nyh uchrezhdenij: bazovyj i profil'nyj urovni*. [YU.M. Kolyagin, M.V. Tkacheva, N.E. Fedorova, M.I. SHabunin]; pod red. A.B. Zhizhchenko (Ed.). – 4-e izd. (p.368). Moscow: Prosveshchenie.
3. (2018). Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 10-11 klassy: uchebnoe posobie dlya obshcheobrazovatel'nyh organizacij / [A.N. Kolmogorov, A.M. Abramov, YU.P. Dudnicyn i dr.]; pod red. A.N. Kolmogorova (Ed.). – 26-e izd. (p.384). Moscow: Prosveshchenie.
4. Vilenkin, N.Y. (2014). Matematika: algebra i nachala matematicheskogo analiza, geometriya. Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 11 klass. Uchebnik dlya uchashchihsya obshcheobrazovatel'nyh organizacij (uglublyonnyj uroven') / N.YA. Vilenkin, O.S. Ivashev-Musatov, S.I. SHvarcburd. – 18-e izd., ster. (p.312). Moscow: Mnemozina.
5. Dalinger, V.A. (1996). *Vse dlya obespecheniya uspekha na vypusknyh i vstupitel'nyh ekzamenah po matematike.* Vypusk 5. Pokazatel'nye, logarifmicheskie uravneniya, neravenstva i ih sistemy: Uchebnoe posobie. (p.106). Omsk: Izd-vo OmGPU.
6. Kolmogorov, A.N. (1968). Obobshchenie ponyatiya stepeni i pokazatel'naya funkciya. *Matematika v shkole*, №1, pp. 24-32.
7. Kostyuchenko, R.Y. (2007). Obuchenie uchashchihsya resheniyu irracional'nyh neravenstv. *Vestnik Omskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta.* (Teoriya i metodika obucheniya) / [Elektronnyj resurs] (data obrashcheniya: 02.02.2020). http://www.omsk.edu/article/vestnik-omgpu-171.pdf
8. Kostyuchenko, R.Y. (2007). Obuchenie uchashchihsya resheniyu irracional'nyh uravnenij. *Vestnik Omskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta*. (Teoriya i metodika obucheniya) / [Elektronnyj resurs] (data obrashcheniya: 02.02.2020). http://www.omsk.edu/article/vestnik-omgpu-194.pdf
9. Manvelov, S. G. (2005). *Konstruirovanie sovremennogo uroka matematiki*: kn. dlya

uchitelya. – 2-e izd. (p.175). Moscow: Prosveshchenie.

10. (2016). *Matematika: algebra i nachala matematicheskogo analiza, geometriya.* Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 10-11 klassy: uchebnik dlya obshcheobrazovatel'nyh organizacij: bazovyj i uglublennyj urovni / [SH.A. Alimov, YU.M. Kolyagin, M.V. Tkacheva i dr.]. – 3-e izd. (p.463). Moscow: Prosveshchenie.
11. Mordkovich, A.G. (2014). *Matematika: algebra i nachala matematicheskogo analiza, geometriya.* Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 11 klass. V 2 ch. CH. 1. Uchebnik dlya uchashchihsya obshcheobrazovatel'nyh organizacij (bazovyj i uglublyonnyj urovni) / A.G. Mordkovich, P.V. Semenov. – 2-e izd., ster. (p.311). Moscow: Mnemozina.
12. (2016). *Primernaya osnovnaya obrazovatel'naya programma srednego obshchego obrazovaniya* (Odobrena resheniem federal'nogo uchebno-metodicheskogo ob"edineniya po obshchemu obrazovaniyu, protokol ot 28 iyunya 2016 g. № 2/16-z) / [Elektronnyj resurs] (data obrashcheniya: 02.02.2020). Retrieved from https://mosmetod.ru/files/dokumenty/Primernaya-osnovnaya-obrazovatelnaya-programma-srednego-obshhego-obrazovaniya.pdf
13. (2012). *Federal'nyj gosudarstvennyj obrazovatel'nyj standart srednego obshchego obrazovaniya* (Prikaz Minobrnauki Rossii ot 17.05.2012 N 413) / [Elektronnyj resurs] Rezhim dostupa. (data obrashcheniya: 02.02.2020). Retrieved from https://fgos.ru