Impact Factor:

ISRA (India)	= **4.971**	**SIS** (USA)	= **0.912**	**ICV** (Poland)	= **6.630**
ISI (Dubai, UAE)	= **0.829**	**РИНЦ** (Russia)	= **0.126**	**PIF** (India)	= **1.940**
GIF (Australia)	= **0.564**	**ESJI** (KZ)	= **8.716**	**IBI** (India)	= **4.260**
JIF	= **1.500**	**SJIF** (Morocco)	= **5.667**	**OAJI** (USA)	= **0.350**

SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal

Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2020 **Issue:** 03 **Volume:** 83

Published: 30.03.2020 **http://T-Science.org**

QR – Issue **QR – Article**

N.A. Abiev
Taraz State University
candidate of physical and mathematical Sciences,
head of the Department of Mathematics

Zh.K. Askerbekova
Taraz State University
master's degree in 2 courses

USING MAPLE TO TENSOR CALCULUS

***Abstract**: We discuss computer interpretation of properties of multi-linear mappings. It is known that calculations relating to tensors are routine enough. We offer ways to solve such problems on computer.*

***Key words**: vector space, dual space, basis, cobasis, tensor.*
***Language**: Russian*
***Citation**: Abiev, N. A., & Askerbekova, Z. K. (2020). Using maple to tensor calculus. *ISJ Theoretical & Applied Science, 03 (83),* 175-180.
***Soi**: http://s-o-i.org/1.1/TAS-03-83-36 ***Doi**: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2020.03.83.36
***Scopus ASCC**: 2600.*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ MAPLE К ВЫЧИСЛЕНИЮ ТЕНЗОРОВ

***Аннотация**: В данной статье рассматриваем вопросы компьютерной интерпретации свойств полилинейных отображений. Как известно, вычисления, связанные с тензорами, являются достаточно трудоемкими. Мы предлагаем способы решения подобных задач на компьютере.*

***Ключевые слова**: векторное пространство, дуальное пространство, базис и кобазис, тензор.*

Введение

УДК 512.647

Приведем известные определения и факты.

Определение 1. Пусть $V_1,..., V_m$ - векторные пространства над полем R. Функция $T: V_1 \times ... \times V_m \to R$ называется *полилинейной*, если для каждого $i = 1,.., m$ линейной является функция $f: x_i \mapsto T(x_1,...x_i, x_i, x_{i+1},...x_m)$ от аргумента x_i при фиксированных $x_1,...x_{i-1}, x_{i+1},...x_m$.

Всюду далее предположим, что расматриваемые векторные пространства конечномерные (см. [2,6,8]). Пусть $\dim V = n$ и обладает базисом $\{e_1,..., e_n\}$. Множество всех линейных отображений $f: V \to R$ можно превратить в векторное пространство, которое называется *дуальным* пространством к V и обозначается символом V^*. Известно, что множество $\{\varepsilon^1,..., \varepsilon^n\}$ элементов из V^*, удовлетворяющая условиям $\varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j$, где δ^i_j-символы Кронекера, образует базис дуального пространства (см. [1,4]). $\{\varepsilon^1,..., \varepsilon^n\}$ называют также *кобазисом* исходного пространства V.

Интересным является ситуация, когда в пространстве V осуществляется переход к другому базису $\{u_1,..., u_n\}$. Напомним соотношения, связывающие эти базисы. Вектора

$\{u_1,\dots,u_n\}$ должны разлагаться по базису $\{e_1,\dots,e_n\}$:

$$u_i = a_i^j e_j\,, \tag{1}$$

где коэффициенты a_i^j являются действительными числами. Нижний индекс указывает на принадлежность коэффициента к вектору u_i, а верхний индекс является индексом суммирования. Так как базисы равноправны, с таким же успехом мы можем разложить вектора $\{e_1,\dots,e_n\}$ по базису $\{u_1,\dots,u_n\}$:

$$e_k = b_k^j u_j\,, \tag{2}$$

где b_k^j являются коэффициентами разложения вектора e_k по базису $\{u_1,\dots,u_n\}$. Из формул (1) и (2) получаем следующее

$$e_k = b_k^j\, a_j^p e_p = \delta_k^p e_p\,.$$

Следовательно, матрицы $A=(a_i^j)$ и $B=(b_k^j)$ являются взаимно обратными.

Естественно, при переходе от базиса $\{e_1,\dots,e_n\}$ к базису $\{u_1,\dots,u_n\}$ изменится и соответствующий дуальный базис $\{\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^n\}$. Пусть новым дуальным базисом является $\{\nu^1,\dots,\nu^n\}$ такой, что $\nu^i(u_j)=\delta_j^i$. Сформулируем известный результат: Если базисы $\{e_1,\dots,e_n\}$ и $\{u_1,\dots,u_n\}$ связаны формулами (1) и (2), то соответствующие дуальные базисы $\{\nu^1,\dots,\nu^n\}$ и $\{\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^n\}$ связаны формулами

$$\varepsilon^i = a_k^i \nu^k\,,\ \ \nu^k = b_j^k \varepsilon^j\,. \tag{3}$$

Покажем вывод формул в (3). Очевидно, что

$$\varepsilon^i(u_j) = \varepsilon^i(a_j^k e_k) = a_j^k \varepsilon^i(e_k) = a_j^k \delta_k^i = a_j^i\,.$$

С другой стороны

$$a_k^i \nu^k(u_j) = a_k^i \delta_j^k = a_j^i\,.$$

Значения линейных функций ε^i и $a_k^i\nu^k$ совпали на базисных векторах u_j. Следовательно, они совпадают всюду согласно известным результатам (см. [2],[6]). Вторая формула в (3) теперь очевидна. Продемонстрируем работу формул (1)-(3) в системе Maple [3]. Выбираем размерность пространства V, его базис и кобазис

> $n := 3$

$$n := 3$$

>
$E := \langle seq(e_j, j=1..n)\rangle$; $\mathrm{E} := \langle seq(\varepsilon_j, j=1..n)\rangle$;

$$E := \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{E} := \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

Используя генератор случайных чисел, выбираем матрицу перехода к другому базису

>
$\beta := rand(-10..10) : A := Matrix(n, (i,j) \rightarrow \beta())$;

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -9 & 1 & -7 \\ -5 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

> $Determinant(A)$

$$-261$$

> $B := MatrixInverse(A)$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{4}{29} & -\frac{2}{29} & \frac{1}{29} \\ -\frac{89}{261} & \frac{1}{261} & -\frac{73}{261} \\ -\frac{59}{261} & -\frac{14}{261} & -\frac{22}{261} \end{bmatrix}$$

Согласно (1) находим новый базис пространства V

> $u := MatrixVectorMultiply(Transpose(A), E)$

$$u := \begin{bmatrix} 4e_1 - 9e_2 - 5e_3 \\ 2e_1 + e_2 - 6e_3 \\ -5e_1 - 7e_2 + 6e_3 \end{bmatrix}$$

Согласно (3) соответствующий новый базис дуального пространства V^* имеет вид

> $\nu := simplify(MatrixVectorMultiply(B, \mathrm{E}))$

$$\nu := \begin{bmatrix} \frac{4}{29}\varepsilon_1 - \frac{2}{29}\varepsilon_2 + \frac{1}{29}\varepsilon_3 \\ -\frac{89}{261}\varepsilon_1 + \frac{1}{261}\varepsilon_2 - \frac{73}{261}\varepsilon_3 \\ -\frac{59}{261}\varepsilon_1 - \frac{14}{261}\varepsilon_2 - \frac{22}{261}\varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

Находим выражения для $\nu^i(u_j)$

```
for i from 1 to n do
for j from 1 to n do
print('ν'[i]'u'[j]' equals', simplify(ν[i]·u[j]))
end do
end do
```

$$\nu_1\, u_1\; equals,\; \frac{1}{29}\left(4\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3\right)\left(4e_1 - 9e_2 - 5e_3\right)$$

$$\nu_1\, u_2\; equals,\; \frac{1}{29}\left(4\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3\right)\left(2e_1 + e_2 - 6e_3\right)$$

$$\nu_1\, u_3\; equals,\; -\frac{1}{29}\left(4\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3\right)\left(5e_1 + 7e_2 - 6e_3\right)$$

$$\nu_2\, u_1\; equals,\; -\frac{1}{261}\left(89\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 73\varepsilon_3\right)\left(4e_1 - 9e_2 - 5e_3\right)$$

$$\nu_2\, u_2\; equals,\; -\frac{1}{261}\left(89\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 73\varepsilon_3\right)\left(2e_1 + e_2 - 6e_3\right)$$

$$\nu_2\, u_3\; equals,\; \frac{1}{261}\left(89\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 73\varepsilon_3\right)\left(5e_1 + 7e_2 - 6e_3\right)$$

$$\nu_3\, u_1\; equals,\; -\frac{1}{261}\left(59\varepsilon_1 + 14\varepsilon_2 + 22\varepsilon_3\right)\left(4e_1 - 9e_2 - 5e_3\right)$$

$$\nu_3\, u_2\; equals,\; -\frac{1}{261}\left(59\varepsilon_1 + 14\varepsilon_2 + 22\varepsilon_3\right)\left(2e_1 + e_2 - 6e_3\right)$$

$$\nu_3\, u_3\; equals,\; \frac{1}{261}\left(59\varepsilon_1 + 14\varepsilon_2 + 22\varepsilon_3\right)\left(5e_1 + 7e_2 - 6e_3\right)$$

Следующий фрагмент программы подтверждает равенства $\nu^i(u_j) = \delta^i_j$, очевидные из соотношений

$$\nu^i(u_j) = (b^i_k \varepsilon^k)(a^m_j e_m) = b^i_k a^m_j$$

$$\varepsilon^k(e_m) = b^i_k a^m_j \delta^k_m = b^i_k a^k_j = \delta^i_j$$

```
for i from 1 to n do
for j from 1 to n do
print('ν'[i]'u'[j]'equals', simplify(BilinearForm(Su
    SubMatrix(Transpose(A), j, 1 ..n), conjugate =
end do
end do;
```

$\nu_1\, u_1\; equals,\; 1$

$\nu_1\, u_2\; equals,\; 0$

$\nu_1\, u_3\; equals,\; 0$

$\nu_2\, u_1\; equals,\; 0$

$\nu_2\, u_2\; equals,\; 1$

$\nu_2\, u_3\; equals,\; 0$

$\nu_3\, u_1\; equals,\; 0$

$\nu_3\, u_2\; equals,\; 0$

$\nu_3\, u_3\; equals,\; 1$

Для наших целей нам нужны также формулы, связывающие координаты в новых базисах. Напоминаем эти формулы. Пусть $x \in V$ - произвольный вектор. Очевидно имеют место разложения $x = x^j e_j = \tilde{x}^i u_i$. Тогда из (1) и единственности разложения по базису вытекает, что

$$x^j = a^j_i \tilde{x}^i, \tag{4}$$

Аналогично из разложений $\omega = \omega_j \varepsilon^j = \tilde{\omega}_i v^i$ согласно (3) получаем следующее:

$$\omega_j = b_j^i \tilde{\omega}_i . \qquad (5)$$

Определение 2. Полилинейная функция специального вида

$$T : \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{r} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{s} \to R$$

называется *тензором* типа (или ранга) (r,s) [1,4,5,7]. Информацию о приложениях тензоров можно найти в [9,10].

Для простоты рассмотрим случай $r = s = 2$. Пусть на векторном пространстве V размерности n задан тензор $T : V^* \times V^* \times V \times V \to R$. Значения $T(\varepsilon^i, \varepsilon^j, e_k, e_s)$ на базисных векторах обозначим традиционно T_{ks}^{ij}. Аналогично значения $T(v^i, v^j, u_k, u_s)$ тензора T в новых базисах обозначим $\tilde{T}_{ks}^{ij}$. Тогда из (1), (3) получаем, что

$$\tilde{T}_{ks}^{ij} = T(b_m^i \varepsilon^m, b_l^j \varepsilon^l, a_k^p e_p, a_s^q e_q) = $$
$$= b_m^i b_l^j a_k^p a_s^q T_{pq}^{ml} . \qquad (6)$$

Рассмотрим теперь задачу вычисления значения $T(\omega, \xi, x, y)$ на векторах $x, y \in V$ и $\xi, \omega \in V^*$. Согласно теории значение $T(\omega, \xi, x, y)$ не должно зависеть от выбора базисов [1]. Действительно, на базисах $\{e_1, \ldots, e_n\}, \{\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n\}$ и $\{u_1, \ldots, u_n\}$, $\{v^1, \ldots, v^n\}$ соответственно имеем

$$T(\omega, \xi, x, y)$$
$$= T\left(\omega_m \varepsilon^m, \xi_l \varepsilon^l, x^p e_p, y^q e_q\right) = T_{pq}^{ml} \omega_m \xi_l x^p y^q , \qquad (7)$$

$$T(\omega, \xi, x, y)$$
$$= T\left(\tilde{\omega}_i v^i, \tilde{\xi}_j \varepsilon^j, \tilde{x}^k u_k, \tilde{y}^s u_s\right) = \tilde{T}_{ks}^{ij} \tilde{\omega}_i \tilde{\xi}_j \tilde{x}^k \tilde{y}^s . \qquad (8)$$

С учетом (6),(5) и (4) получаем равенство правых частей (7) и (8):

$$\tilde{T}_{ks}^{ij} \tilde{\omega}_i \tilde{\xi}_j \tilde{x}^k \tilde{y}^s = b_m^i b_l^j a_k^p a_s^q T_{pq}^{ml} \, \tilde{\omega}_i \tilde{\xi}_j \tilde{x}^k \tilde{y}^s =$$
$$= T_{pq}^{ml} \, b_m^i \, \tilde{\omega}_i \, b_l^j \, \tilde{\xi}_j \, a_k^p \, \tilde{x}^k \, a_s^q \, \tilde{y}^s = T_{pq}^{ml} \, \omega_m \, \xi_l \, x^p \, y^q .$$

Продемонстрируем это равенство на компьютере. Для простоты остановимся на случае $n = 2$. Случай больших размерностей аналогичен этому.

>

$n := 2 : E := \langle seq(e_j, j = 1..n) \rangle : \mathrm{E} := \langle seq(\varepsilon_j, j = 1..n) \rangle :$

Пусть ковектора и вектора ω, ξ, x, y задаются своими координатами:

$X := \langle seq(x_j, j = 1..n) \rangle; Y := \langle seq(y_j, j = 1..n) \rangle;$
$\Xi := \langle seq(\xi_j, j = 1..n) \rangle; \Omega := \langle seq(\omega_j, j = 1..n) \rangle$

$$X := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$Y := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\Xi := \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

$$\Omega := \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$

Итак мы имеем $x = x^p e_p$, $y = y^q e_q$, $\omega = \omega_m \varepsilon^m$ и $\xi = \xi_l \varepsilon^l$. Тогда для $T(\omega, \xi, x, y)$ согласно (7) мы получаем следующее:

$W := add(add(add(add(T_{m,l,p,q} \cdot \Omega[m] \cdot \Xi[l] \cdot X[p] \cdot Y[q], m = 1..n), l = 1..n), p = 1..n), q = 1..n)$

$$W := T_{1,1,1,1}\,\omega_1\,\xi_1\,x_1\,y_1 + T_{1,1,2,1}\,\omega_1\,\xi_1\,x_2\,y_1 + T_{1,2,1,1}\,\omega_1\,\xi_2\,x_1\,y_1 + T_{1,2,2,1}\,\omega_1\,\xi_2\,x_2\,y_1$$
$$+ T_{2,1,1,1}\,\omega_2\,\xi_1\,x_1\,y_1 + T_{2,1,2,1}\,\omega_2\,\xi_1\,x_2\,y_1 + T_{2,2,1,1}\,\omega_2\,\xi_2\,x_1\,y_1 + T_{2,2,2,1}\,\omega_2\,\xi_2\,x_2\,y_1$$
$$+ T_{1,1,1,2}\,\omega_1\,\xi_1\,x_1\,y_2 + T_{1,1,2,2}\,\omega_1\,\xi_1\,x_2\,y_2 + T_{1,2,1,2}\,\omega_1\,\xi_2\,x_1\,y_2 + T_{1,2,2,2}\,\omega_1\,\xi_2\,x_2\,y_2$$
$$+ T_{2,1,1,2}\,\omega_2\,\xi_1\,x_1\,y_2 + T_{2,1,2,2}\,\omega_2\,\xi_1\,x_2\,y_2 + T_{2,2,1,2}\,\omega_2\,\xi_2\,x_1\,y_2 + T_{2,2,2,2}\,\omega_2\,\xi_2\,x_2\,y_2$$

Осуществим теперь переход к новому базису, используя матрицу

$> A := Matrix(n, (i,j) \to a[i,j])$

$$A := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

$> B := MatrixInverse(A):$

Далее мы хотим вычислить $T(\omega,\xi,x,y)$ в новых базисах. Из формул (4),(5), выражающих матричные равенства $X = A\tilde{X}$, $\Omega = B^T\tilde{\Omega}$, вытекают следующие равенства

$$\tilde{X} = BX\,,\ \hat{\Omega} = A^T\Omega\,, \tag{9}$$

поскольку $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T = A^T$.

Используя формулы (9), находим новые координаты векторов ω,ξ,x,y:

$X^{\sim} := simplify(MatrixVectorMultiply(B, X));$
$Y^{\sim} := simplify(MatrixVectorMultiply(B, Y));$
$\Xi^{\sim} := simplify(MatrixVectorMultiply(Transpose(A), \Xi));$
$\Omega^{\sim} := simplify(MatrixVectorMultiply(Transpose(A), \Omega));$

$$X^{\sim} := \begin{bmatrix} -\dfrac{a_{1,2}x_2 - a_{2,2}x_1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}} \\ \dfrac{a_{1,1}x_2 - a_{2,1}x_1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}} \end{bmatrix}$$

$$Y^{\sim} := \begin{bmatrix} -\dfrac{a_{1,2}y_2 - a_{2,2}y_1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}} \\ \dfrac{a_{1,1}y_2 - a_{2,1}y_1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}} \end{bmatrix}$$

$$\Xi^{\sim} := \begin{bmatrix} a_{1,1}\xi_1 + a_{2,1}\xi_2 \\ a_{1,2}\xi_1 + a_{2,2}\xi_2 \end{bmatrix}$$

$$\Omega^{\sim} := \begin{bmatrix} a_{1,1}\omega_1 + a_{2,1}\omega_2 \\ a_{1,2}\omega_1 + a_{2,2}\omega_2 \end{bmatrix}$$

В таком случае с учетом (8) $T(\omega,\xi,x,y)$ в новых базисах имеет представление

$$W^{\sim} := simplify\Big(add\Big(add\Big(add\Big(add\Big(T^{\sim}_{i,j,k,s}\cdot\Omega^{\sim}[i]\cdot\Xi^{\sim}[j]\cdot X^{\sim}[k]\cdot Y^{\sim}[s], i = 1..n\Big), j = 1..n\Big), k = 1..n\Big), s = 1..n\Big)\Big):$$

где новые коэффициенты $\tilde{T}^{ij}_{ks}$ находятся по формулам (6)

for i **from** 1 **to** n **do** **for** j **from** 1 **to** n **do** **for** k **from** 1 **to** n **do** **for** s **from** 1 **to** n **do**
$T^{\sim}_{i,j,k,s} := add\big(B_{i,m}\cdot add\big(B_{j,l}\cdot add\big(A_{p,k}\cdot add\big(A_{q,s}\cdot T_{m,l,p,q}, q = 1..n\big), p = 1..n\big), l = 1..n\big), m = 1..n\big)$
end do **end do** **end do** **end do**

Явное выражение $T(\omega,\xi,x,y)$ в новых базисах получается громоздким, поэтому здесь приводить его не будем. Для нас важен конечный результат вычислений, подтверждающий тот факт, что значение тензора не зависит от выбора базиса. Действительно, как показывают вычисления:

$$> simplify\left(\frac{W^{\sim}}{W}\right)$$

$$1$$

Замечание. Мы ставили целью показать принципиальную возможность использования системы Maple в задачах полилинейной алгебры. Мы допускаем вероятность того, что другие библиотеки этой системы (например, with(tensor)) могут располагать более эффективными командами, чем использованные здесь нами.

References:

1. Bishop, R.L., & Goldberg, S.I. (1968). *Tensor analysis on manifolds.* (p.280). The Macmillan Co., New York; Collier-Macmillan Ltd., London.
2. Blythб T.S., & Robertson, E.F. (2002). *Basic Linear Algebra.* Springer Undergraduate Mathematics Series. Second edition. (p.232). Springer-Verlag, London.
3. Borwein, J.M., & Skerritt, M.P. (2011). *An introduction to modern mathematical computing.* With Maple. Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology. (p.216). Springer, New York.
4. Bowen, R. M., & Wang, C.-C. (2008). Introduction to Vectors and Tensors, Vol. 1: Linear and Multilinear Algebra. (p.294). Mineola, NY: Dover Publications.
5. Domingos, J. (2006). *Geometrical properties of vectors and convectors.* (p.73). Hackensack, NJ: World Scientific.
6. Friedberg, S.H., Insel, A.J., & Spence, L.E. (1989). *Linear Algebra.* Second edition. (p.530). Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
7. Grinfeld, P. (2013). *Introduction to tensor analysis and the calculus of moving surfaces*. (p.302). Springer, New York.
8. Halmos, P.R. (1974). *Finite-Dimensional Vector Spaces*. Undergraduate Texts in Mathematics. (p.200). Springer-Verlag, New York-Heidelberg.
9. Itskov, M. (2015). *Tensor algebra and tensor analysis for engineers*. With applications to continuum mechanics. (p.290). Cham: Springer.
10. Lee, J.M. (2003). Introduction to Smooth Manifolds. *Graduate Texts in Mathematics*, 218. (p.628). Springer-Verlag, New York.