SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2020 **Issue:** 03 **Volume:** 83

Published: 30.03.2020 http://T-Science.org

QR – Issue QR – Article

Alexandr Sergeevych Praded
Bryansk State University named after I.G. Petrovsky
student, Russia

ON *n*-MULTIPLE ω-FIBEREDFITTING CLASSES OF FINITE GROUPS

Abstract: *The article is devoted to study of Fitting classes of finite groups. The main research method used in the article is functional. We have obtained the n-multiple ω-fiber properties of some Fitting classes of finite groups.*

Key words: *a finite group, a class of groups, a Fitting class, an ω-fibered Fitting class, an n-multiple ω-fibered Fitting class.*
Language: *Russian*
Citation: Praded, A. S. (2020). On *n*-multiple ω-fiberedfitting classes of finite groups. *ISJ Theoretical & Applied Science, 03 (83),* 323-326.
Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-03-83-59 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2020.03.83.59
Scopus ASCC: *2602.*

ОБ *n*-КРАТНО ω-ВЕЕРНЫХ КЛАССАХ ФИТТИНГА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Аннотация: *Данная статья посвящена исследованию классов Фиттинга конечных групп. Основным методом исследования, применяемым в статье, является функциональный метод. В статье установленап-кратная ω-веерность некоторых классов Фиттинга конечных групп.*

Ключевые слова: *конечная группа, класс групп, класс Фиттинга, ω-веерный класс Фиттинга, n-кратно ω-веерный класс Фиттинга.*

Введение

В рамках алгебры зародился один из важнейших разделов математики – теория групп (см., например, [4]). Её последующее развитие дало толчок к появлению новых подразделов теории групп. Одним из них является теория классов групп, в которой рассматриваются особые структуры – классы групп, то есть множества, содержащие вместе с каждой своей группой и все группы ей изоморфные. Изучая классы групп, были выделенытакие объекты, как классы Фиттинга [15, 16]. Результаты последующих исследований в этом направлении связаны с локальными классами Фиттинга. Так, были введены ω-локальные классы Фиттинга, позднее – ω-веерные классы Фиттинга. Исследованием таких классов Фиттинга занимались Л.А. Шеметков, Н.Т. Воробьев, А.Н. Скиба, Н.Н. Воробьев, В.А. Ведерников, М.М. Сорокина, О.В. Камозина, В.Е. Егорова, Е.Н. Бажанова и другие (см., например, [1–3, 9, 11–14]).

В 1987 году А.Н. Скибойбыла введена в рассмотрение концепция кратной локальности для формаций конечных групп (см., например, [10]). В последующем она была обобщена на локальные и ω-локальные классы Фиттинга. В результате появились новые понятия, необходимые для описания подобных структур, одним из которых явилось понятие индекса $Ind_l(\mathfrak{F})$ локальности класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. В данной работе вводится в рассмотрение понятие индекса $Ind_{\omega\delta}(\mathfrak{F})$ $\omega\delta$-веерности класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ конечных групп и изучаются его свойства.

В статье рассматриваются только конечные группы. Все используемые определения для групп и классов групп стандартны (см., например, [15]). Здесь приведены лишь некоторые из них. Классом групп называется множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G. Через $(\mathfrak{X})$ обозначается класс групп, порождённый множеством групп $(\mathfrak{X})$. Если $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ – классы групп, то $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 =$

$(G \mid$ существует $N \lhd G$ такая, что $N \in \mathfrak{F}_1$ и $G/N \in \mathfrak{F}_2)$. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$, то $N \in \mathfrak{F}$;

2) если $G = N_1N_2$, $N_1 \in \mathfrak{F}$, $N_2 \in \mathfrak{F}$, $N_1 \lhd G$, $N_2 \lhd G$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Через $\mathfrak{E}$ обозначается класс всех конечных групп; $\mathfrak{N}$ – класс всех конечных нильпотентных групп; $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп, $p \in \mathbb{P}$, $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда $\mathfrak{F}_p$ и $\mathfrak{F}_\pi$ – соответственно классы всех p-групп и π-групп, принадлежащих классу $\mathfrak{F}$. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G;через ω обозначается произвольное непустое множество простых чисел; через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т.е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, фактор-группа по которой принадлежит классу $\mathfrak{F}$; через $G_{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-радикал группы G, т.е. наибольшая нормальная подгруппа группы G, принадлежащая классу $\mathfrak{F}$.

Зададим следующие функции:

$f: \omega \cup \{\omega'\} \to \{$классы Фиттинга$\}$, где $f(\omega') \neq \emptyset$,

$h: \mathbb{P} \to \{$классы Фиттинга$\}$,

$\delta: \mathbb{P} \to \{$непустые формации Фиттинга$\}$,

называемые соответственно ωR-функцией, $\mathbb{P}R$-функцией, $\mathbb{P}FR$-функцией. Класс Фиттинга

$$\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{E} \mid O^{\omega}(G) \in f(\omega') \text{ и } G^{\delta(p)} \in f(p) \text{ для любого } p \in \omega \cap \pi(G))$$

называется ω-веерным классом Фиттинга с ω-спутником f, направлением δ и обозначается $\mathfrak{F} = \omega R(f,\delta)$; класс Фиттинга$\mathfrak{H} = (G \in \mathfrak{E} \mid G^{\delta(p)} \in h(p)$для любого $p \in \pi(G))$ называется веерным классом Фиттинга со спутником h и направлением δ и обозначается $\mathfrak{H} = \mathbb{P}R(h,\delta)$ [13]. Направление δ ω-веерного (веерного) класса Фиттинга называется b-направлением, если $\delta(p) = \mathfrak{N}_p\delta(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$; p-направлением, если $\delta(q) = \delta(q)\mathfrak{E}_{q'}$ для любого $q \in \mathbb{P}$, bp-направлением, если δявляется b-направлениеми p-направлением [12].

Пусть δ – произвольная $\mathbb{P}FR$-функция, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Согласно [12], всякий класс Фиттинга считают 0-кратно ω-веерным с направлением δ. При $n \neq 0$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют n-кратно ω-веерным с направлением δ, если $\mathfrak{F}$ имеет хотя бы один $\omega R_{(n-1)}$-спутник, то есть такой ωR-спутник, все непустые значения которого являются $(n-1)$-кратно ω-веерными классами классами Фитинга с направлением δ.

Теорема 1.

Пусть δ – произвольная $\mathbb{P}FR$-функция. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$ является n-кратно ω-веерным классом Фиттинга с направлением δ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство.

Доказательство проведём методом математической индукции по параметру n.

1) Установим справедливость утверждения при $n = 1$. По теореме 1 [8] класс групп $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$ является ω-веерным классом Фиттинга с направлением δ.

2) Предположим, что утверждение верно при $n = k$.

3) Покажем, что утверждение верно при $n = k + 1$. Согласно теореме 1 [8] $\mathfrak{F} = \omega R(f,\delta)$, где $f(\omega') = \mathfrak{E}$ и $f(p) = \mathfrak{E}$ для любого $p \in \omega$. По предположению индукции $f(\omega')$ и $f(p)$ для любого $p \in \omega$ являются k-кратно ω-веерными классами Фиттинга с направлением δ. Тогда f – ωR_k-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ – $(k+1)$-кратно ω-веерный класс Фиттинга с направлением δ.

Из пунктов 1) –3) по методу математической индукции следует, что утверждение верно для любого $n \in \mathbb{N}$.

Теорема доказана.

Теорема 2.

Пусть δ – произвольная $\mathbb{P}FR$-функция. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_{\omega'}$ является n-кратно ω-веерным классом Фиттинга с направлением δ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство.

Доказательство проведём методом математической индукции по параметру n.

1) Установим справедливость утверждения при $n = 1$. По теореме 4 [8] класс групп $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_{\omega'}$ является ω-веерным классом Фиттинга с направлением δ.

2) Предположим, что утверждение верно при $n = k$.

3) Покажем, что утверждение верно при $n = k + 1$. Согласно теореме 4 [8] $\mathfrak{F} = \omega R(f,\delta)$, где $f(\omega') = \mathfrak{E}_{\omega'}$ и $f(p) = \emptyset$ для любого $p \in \omega$. По предположению индукции $f(\omega')$ является k-кратно ω-веерным классом Фиттинга с направлением δ. Тогда f – ωR_k-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ – $(k+1)$-кратно ω-веерный класс Фиттинга с направлением δ.

Из пунктов 1) – 3) по методу математической индукции следует, что утверждение верно для любого $n \in \mathbb{N}$.

Теорема доказана.

Теорема 3.

Пусть δ – произвольная $\mathbb{P}FR$-функция, $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\pi$ является n-кратно ω-веерным классом Фиттинга с направлением δ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство.

Доказательство проведём методом математической индукции по параметру n.

1) Установим справедливость утверждения при $n = 1$. По теореме 1 [6] класс групп $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\pi$ является ω-веерным классом Фиттинга с направлением δ.

2) Предположим, что утверждение верно при $n = k$.

3) Покажем, что утверждение верно при $n = k + 1$. Согласно теореме 1 [6] $\mathfrak{F} = \omega R(f, \delta)$, где $f(\omega') = \mathfrak{E}_\pi$ и $f(p) = \mathfrak{E}_\pi$ для любого $p \in \omega$. По предположению индукции $f(\omega')$ и $f(p)$ для любого $p \in \omega$ являются k-кратно ω-веерными классами Фиттинга с направлением δ. Тогда f – ωR_k-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ – $(k + 1)$-кратно ω-веерный класс Фиттинга с направлением δ.

Из пунктов 1) – 3) по методу математической индукции следует, что утверждение верно для любого $n \in \mathbb{N}$.

Теорема доказана.

Через $\mathfrak{E}_{c\omega}$ обозначим класс всех групп, у которых каждый главный ω-фактор централен; $\mathfrak{E}_{c\omega'}$ – класс всех групп, у которых каждый главный ω'-фактор централен.

Теорема 4.

Пусть δ – произвольная $\mathbb{P}FR$-функция, являющаяся bp-направлением таким, что $\bigcap_{p\in\omega} \delta(p) \subseteq \mathfrak{E}_{c\omega} \cap \mathfrak{E}_{c\omega'}$. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ является n-кратно ω-веерным классом Фиттинга с направлением δ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство.

Доказательство проведём методом математической индукции по параметру n.

1) Установим справедливость утверждения при $n = 1$. По теореме 2 [6] класс групп $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ является ω-веерным классом Фиттинга с направлением δ.

2) Предположим, что утверждение верно при $n = k$.

3) Покажем, что утверждение верно при $n = k + 1$. Согласно теореме 2 [6] $\mathfrak{F} = \omega R(f, \delta)$, где $f(\omega') = \mathfrak{N}$ и $f(p) = (1)$ для любого $p \in \omega$. По предположению индукции $f(\omega')$ – k-кратно ω-веерный класс Фиттинга с направлением δ, а $f(p)$ для любого $p \in \omega$ – по лемме 3 [7]. Тогда f – ωR_k-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ – $(k + 1)$-кратно ω-веерный класс Фиттинга с направлением δ.

Из пунктов 1) – 3) по методу математической индукции следует, что утверждение верно для любого $n \in \mathbb{N}$.

Теорема доказана.

Теорема 5.

Пусть δ – произвольная $\mathbb{P}FR$-функция, являющаяся bp-направлением таким, что $\bigcap_{p\in\omega} \delta(p) \subseteq \mathfrak{E}_{c\omega} \cap \mathfrak{E}_{c\omega'}$, $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\pi$ является n-кратно ω-веерным классом Фиттинга с направлением δ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство.

Доказательство проведём методом математической индукции по параметру n.

1) Установим справедливость утверждения при $n = 1$. По теореме 3 [6] класс групп $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\pi$ является ω-веерным классом Фиттинга с направлением δ.

2) Предположим, что утверждение верно при $n = k$.

3) Покажем, что утверждение верно при $n = k + 1$. Согласно теореме 3 [6] $\mathfrak{F} = \omega R(f, \delta)$, где $f(\omega') = \mathfrak{N}_\pi$, $f(p) = \emptyset$, если $p \in \omega \backslash \pi$, $f(p) = (1)$, если $p \in \pi$. По предположению индукции $f(\omega')$ – k-кратно ω-веерный класс Фиттинга с направлением δ, а $f(p)$ для любого $p \in \pi$ – по лемме 3 [7]. Тогда f – ωR_k-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ – $(k + 1)$-кратно ω-веерный класс Фиттинга с направлением δ.

Из пунктов 1) – 3) по методу математической индукции следует, что утверждение верно для любого $n \in \mathbb{N}$.

Теорема доказана.

Научное исследование проведено под руководством Сорокиной Марины Михайловны, доктора физико-математических наук, профессора, Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского.

References:

1. Bazhanova, E.N., & Vedernikov V.A. (2017). *Ω-rassloennye klassy Fittinga T-grupp. Sib. elektron. matem. izv.*, T. 14, pp. 629 – 639.
2. Egorova, V.E. (2008). Kriticheskiene odnoporozhdyonnye total'no kanonicheskie klassy Fittinga konechnyh grupp.

Matematicheskie zametki, T. 83, № 4, pp. 520 – 527.

3. Kamozina, O.V. (2006). O neodnoporozhdyonnyh ω-veernyh klassah Fittinga konechnyh grupp. *Matematicheskie zametki*, T. 79, № 3, pp. 396 – 408.
4. Kurosh, A.G. (1967). *Teoriya grupp*. Moscow: Nauka.
5. Monahov, V.S. (2006). *Vvedenie v teoriyu konechnyh grupp i ih klassov*: uchebnoe posobie. – Mn.: Vyshejshaya shkola.
6. Praded, A.S. (2020). ω-fibered Fitting classes of finite groups. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 01 (81), 117–120.
7. Praded, A.S. (2020). *Ob indekse $\omega\delta$-veernosti klassa Fittinga konechnyh grupp*. Sbornik nauchnyh statej po itogam raboty Mezhdunarodnogo nauchnogo foruma NAUKA I INNOVACII – SOVREMENNYE KONCEPCII (g. Moskva, 11 fevralya 2020 g.). / otv. red. D.R. Hismatullin. (pp.166-174). Moskva: Izdatel'stvo Infiniti.
8. Praded, A.S., & Maksakov, S.P. (2019). O sputnikah ω-veernyh klassov Fittinga konechnyh grupp. *Voprosy tekhnicheskih i fiziko-matematicheskih nauk v svete sovremennyh issledovanij: sb. st. po mater. XIII mezhdunar. nauch.–prakt. konf.* № 3(10). – Novosibirsk: SibAK, pp. 24–30.
9. Sorokina, M.M. (2000). *O minimal'nyh sputnikah kratno Ω-rassloennyh klassov Fittinga konechnyh grupp*. Bryanskomu gosudarstvennomu universitetu imeni akademika I.G. Petrovskogo – 70 let: sbornik nauchnyh trudov. (pp.199-204). Bryansk: Izdatel'stvo BGPU.
10. Skiba, A.N. (1997). *Algebra formacii*. – Mn.: Belarusskaya navuka.
11. Syromolotova, O.V. (2004). Proizvedeniya klassov Fittinga konechnyh grupp. *Matematicheskie zametki*, T. 75, № 2, pp.269–276.
12. Vedernikov, V.A. (2002). O novyh tipah ω-veernyh klassov Fittinga konechnyh grupp. *Ukrainskij matematicheskij zhurnal*, 54, № 7, pp. 897–906.
13. Vedernikov, V.A., & Sorokina, M.M. (2002). ω-veernye formacii i klassy Fittinga konechnyh grupp. *Matematicheskie zametki*, T. 71, № 1, pp. 43–60.
14. Vorob'yov, N.N. (2012). *Algebra klassov konechnyh grupp*. Vitebsk: VGU imeni P.M. Masherova.
15. Doerk, K., & Hawkes, T. (1992). *Finite soluble groups*. – Walter de Gruyter, Berlin – New York.
16. Nartley, B. (1969). On Fischer's analization of formation theory. *Proc. London Math. Soc.*, Vol. 3, № 9, pp. 193–207.