

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971
ISI (Dubai, UAE) = 0.829
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
ПИИИ (Russia) = 0.126
ESJI (KZ) = 8.997
SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

International Scientific Journal Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2020 Issue: 08 Volume: 88

Published: 25.08.2020 <http://T-Science.org>

QR – Issue



QR – Article



Zokir Bozorboyevich Khudayberdiyev
Samarkand State University
Senior Lecturer to Department of
Theoretical and Applied Mechanics,
xudoyberdiyevz@mail.ru

Sherzod Narkazakovich Isroilov
Samarkand State University
Lecturer to Department of
Theoretical and Applied Mechanics

Xudoynazar Norim o'g'li Axatov
Samarkand State University
Lecturer to Department of
Theoretical and Applied Mechanics

Rashid Sharafovich Usanov
school № 15 of the city of Samarkand
Teacher

NON-STATIONARY VIBRATIONS OF THREE-LAYERED ELASTIC PLATE

Abstract: Theory of non-stationary vibrations of three-layered elastic plate from 2D statement of problem on the basis of exact solutions of the equations of the linear viscoelasticity theory in transformations is developed. The equations of symmetric vibration infinite three-layered plate concerning two principal functions which are bodies of displacements of some intermediate surface of a middle layer are received. The algorithm allowing to define of SSS by required functions unequally the of arbitrary layer of the plate is offered.

Key words: three-layer plate, vibration, non-stationary, layer, linear theory.

Language: Russian

Citation: Khudayberdiyev, Z. B., Isroilov, S. N., Axatov, X. N., & Usanov, R. S. (2020). Non-stationary vibrations of three-layered elastic plate. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 08 (88), 65-72.

Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-08-88-16> **Doi:**  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2020.08.88.16>

Scopus ASCC: 2200.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ

Аннотация: Разработана теория нестационарных колебаний трехслойной упругой пластинки исходя из плоской постановки задачи на основе точных решений уравнений линейной теории упругости в преобразованиях. Получены уравнения колебания симметричных колебаний бесконечной в плане трехслойной пластинки относительно двух вспомогательных функций, являющихся главными частями перемещений некоторой промежуточной поверхности срединного слоя. Предложен алгоритм, позволяющий по полю искомым функций однозначно определить НДС произвольного слоя пластинки.

Ключевые слова: трехслойная пластинки, колебания, нестационарный, слой, линейная теория.

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971
 ISI (Dubai, UAE) = 0.829
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИНЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 8.997
 SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

Введение

Динамический расчет трехслойных, пластин во многих случаях основывается на классических теориях, которые опираются на гипотезы Кирхгофа на уточненные теории типа Тимошенко [1-4].

Исследования по развитию и уточнению классической теории [5-7] можно подразделить на два направления: разработка асимптотических теорий и разработка теорий типа Тимошенко и Рейсснера. За последние несколько десятилетий разработаны теории колебания пластин, основанные на методе точных решений Г.М.Петрашени [8-9]. Этим методом разработаны различные варианты теории колебания трехслойных пластин симметричной структуры И.Г.Филипповым и его учениками [10-13].

Статья посвящена разработке теории симметричных колебаний трехслойной упругой пластинки в плоской постановке относительно двух неизвестных функций, являющихся главными частями перемещений некоторой «промежуточной» поверхности пластинки. Разработан алгоритм определения НДС пластинки в произвольном её сечении.

Постановка задачи и метод решения.

В декартовой системе координат рассмотрим бесконечную трёхслойную пластинку. Считается, что рациональная конструкция пластинки с точки зрения его работы на изгиб будет такой, когда основная масса жесткого материала в виде двух

слоев (назовем их несущими слоями) разнесена на некоторое расстояние с помощью (тонкой стенки) третьего слоя из того же материала, или когда пространство между жесткими слоями заполнено более лёгким, а следовательно, менее жестким материалом (заполнителем), удерживающем слои на этом расстоянии и осуществляющим их совместную работу. Если рассматривается задачи, отличные от задач чистого изгиба пластины, то нетрудно понять, что совместная работа несущих слоев зависит от способности заполнителя сопротивляться их относительному сдвигу. Исходя из этих соображений, будем считать, что контакты между несущими слоями и заполнителем жесткие.

Учитывая неограниченность размеров пластинки, в дальнейшем будем считать, что она находится в условиях плоской деформации, те отнесем её к системе прямоугольных координат Oxz (рис. 1). При этом ось Ox направим вдоль поперечного сечения Oxz по его среднему линии, а ось Oz – вверх. Пронумеруем слои пластинки на рис.1, т.е. верхний несущий слой назовем первым слоем, нижний несущий слой – вторым, а заполнитель – нулевым слоем. Пусть h_1 , $2h_0$ и h_2 толщина первого, нулевого и второго слоев. λ_m, μ_m – упругие постоянные материалов слоев т.е. коэффициенты Ляме; ρ_m – объёмные плотности слоев.

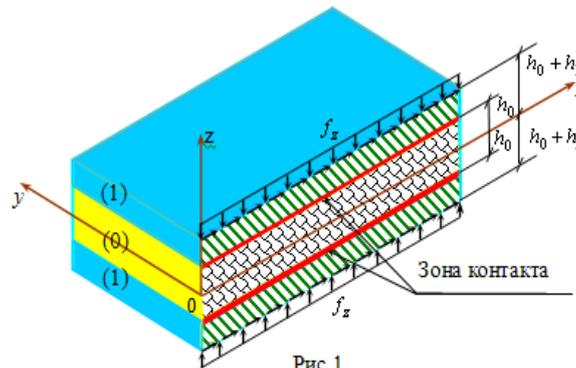


Рис 1

Зависимости напряжений $\sigma_{ij}^{(m)}$ от деформаций $\varepsilon_{ij}^{(m)}$ в точках слоев пластинки описываются законом Гука для каждого слоя ($m=0,1,2$). Уравнения движения точек составляющих слоев в декартовой системе координат

$$\sigma_{ij,j}^{(m)} = \rho_m \ddot{U}_i^{(m)}; \quad (1)$$

при зависимости (1) значительно упрощаются введением потенциалов Φ_m и Ψ_m продольных и поперечных волн по формуле

$$\vec{U}^{(m)} = \text{grad}\Phi_m + \text{rot}\vec{\Psi}_m; \quad (2)$$

и принимают вид волновых уравнений.

$$\begin{cases} \lambda_{m1}(\Delta\Phi_m) = \rho_m \ddot{\Phi}_m; \\ \mu_m(\Delta\vec{\Psi}_m) = \rho_m \ddot{\vec{\Psi}}_m; \end{cases} \quad \lambda_m = \lambda_{1m} + \mu_m, \quad (3)$$

где Δ - дифференциальный оператор Лапласа.

В случае плоской деформации учитывая, что векторы перемещений точек слоев равны

$$\vec{U}^m = U_m \cdot \vec{i} + W_m \cdot \vec{k};$$

$$U_m = U_m(x, z, t), W_m = W_m(x, z, t), \quad (4)$$

где \vec{i} , \vec{k} – единичные орты осей координат достаточно положить

$$\vec{\Phi}_m = \varphi_m(x, z, t), \quad \vec{\Psi}_m = \psi_m(x, z, t)\vec{j}, \quad (5)$$

где \vec{j} – единичный орт оси Oy , чтобы уравнения движения точек слоев пластинки приобрели вид

$$\begin{aligned} \lambda_m(\Delta\varphi_m) &= \rho_m \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial t^2}; \\ \mu_m(\Delta\psi_m) &= \rho_m \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2.$$

В силу теоремы Гельмгольца [3] при отсутствии внутренних источников векторные потенциалы $\vec{\Psi}_m$ поперечных волн должны удовлетворять условиям соленоидальности векторных полей

$$\text{div}\vec{\Psi}_m = 0, \quad m = 0, 1, 2,$$

которые в случае (5) выполняются автоматически.

Предполагается, что при $t < 0$ пластинка находилась в покое, а в момент $t = 0$ к её граничным поверхностям прикладываются динамические воздействия [5]

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(i)}(x, z, t)\Big|_{z=\pm h_i^*} &= \pm F_x^{(i)}(x, t); \\ \sigma_{zz}^{(i)}(x, z, t)\Big|_{z=h_i^*} &= \pm F_z^{(i)}(x, t); \\ \sigma_{yz}^{(i)}(x, z, t)\Big|_{z=\pm h_i^*} &= 0, \quad h_i^* = h_0 + h_i. \end{aligned} \quad (7)$$

Кроме того, на поверхностях заполнителя $z = \pm h_0$ имеют места динамические и кинематические контактные условия

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(0)}(x, z, t)\Big|_{z=\pm h_0} &= \begin{cases} \sigma_{zz}^{(1)}(x, z, t)\Big|_{z=h_0}, \\ \sigma_{zz}^{(2)}(x, z, t)\Big|_{z=-h_0}; \end{cases} \\ \sigma_{xz}^{(0)}(x, z, t)\Big|_{z=\pm h_0} &= \begin{cases} \sigma_{xz}^{(1)}(x, z, t)\Big|_{z=h_0}, \\ \sigma_{xz}^{(2)}(x, z, t)\Big|_{z=-h_0}; \end{cases} \\ \sigma_{yz}^{(0)}(x, z, t)\Big|_{z=\pm h_0} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

и

$$\begin{aligned} U_0(x, z, t)\Big|_{z=\pm h_0} &= \begin{cases} U_1(x, z, t)\Big|_{z=h_0}; \\ U_2(x, z, t)\Big|_{z=-h_0}, \end{cases} \\ W_0(x, z, t)\Big|_{z=\pm h_0} &= \begin{cases} W_1(x, z, t)\Big|_{z=h_0}; \\ W_2(x, z, t)\Big|_{z=-h_0}. \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

Начальные условия задачи считаются нулевыми, т.е. при $t = 0$

Таким образом, решение задачи о нестационарных колебаниях трехслойной пластинки приводится к решению шести интегродифференциальных уравнений второго порядка (6) с двенадцатью граничными и контактными условиями (7), (8), (9), а также нулевыми начальными условиями.

Теперь, выразим компоненты векторов перемещений, а также тензоров напряжений и деформаций слоев через введенные потенциальные функции (5). Подставляя (4) и (3) в формулы (2) легко получить

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} - \frac{\partial \psi_m}{\partial z}; \\ W_m &= \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} + \frac{\partial \psi_m}{\partial x}, \quad (m = 0, 1, 2). \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогично, нетрудно вывести формулы для компонент напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(m)} &= \lambda_{1m}(\Delta\varphi_m) + 2\lambda_m \left(\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x \partial z} \right); \\ \sigma_{xz}^{(m)} &= \mu_m \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} \right); \\ \sigma_{zz}^{(m)} &= \lambda_{1m}(\Delta\varphi_m) + 2\mu_m \left(\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x \partial z} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Решение задачи. В соответствии с принятыми представлениями для функции внешнего воздействия

$$\begin{aligned} f_x^{(1,2)}(x, t) &= \int_0^\infty \frac{\cos kx}{\sin kx} \Bigg\} dk \int_{(i)} \tilde{f}_x^{(1,2)}(k, p) e^{pt} dp; \\ f_z^{(1,2)}(x, t) &= \int_0^\infty \frac{\sin kx}{-\cos kx} \Bigg\} dk \int_{(i)} \tilde{f}_z^{(1,2)}(k, p) e^{pt} dp, \end{aligned}$$

решение задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_m(x, z, t) &= \int_0^\infty \frac{\sin kx}{-\cos kx} \Bigg\} dk \int_{(i)} \tilde{\varphi}_m(z, k, p) e^{pt} dp; \\ \psi_m(x, z, t) &= \int_0^\infty \frac{\cos kx}{\sin kx} \Bigg\} dk \int_{(i)} \tilde{\psi}_m(z, k, p) e^{pt} dp. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя (12) в (6) будем иметь

$$\frac{d^2 \tilde{\varphi}_m}{dz^2} - \alpha_m^2 \tilde{\varphi}_m = 0, \quad \frac{d^2 \tilde{\psi}_m}{dz^2} - \beta_m^2 \tilde{\psi}_m = 0. \quad (13)$$

где

$$\alpha_m^2 = k^2 + \rho_m p^2 \tilde{\lambda}_m^{-1}, \quad \beta_m^2 = k^2 + \rho_m p^2 \tilde{\mu}_m^{-1}.$$

Как известно, общие решения (13) имеют

вид

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_m(z, k, p) &= A_m^{(1)}(k, p) ch \alpha_m z + A_m^{(2)}(k, p) sh \alpha_m z; \\ \tilde{\psi}_m(z, k, p) &= B_m^{(1)}(k, p) sh \beta_m z + B_m^{(2)}(k, p) ch \beta_m z, \end{aligned} \quad (14)$$

В случае симметричных воздействий в соответствии,

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971
 ISI (Dubai, UAE) = 0.829
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 8.997
 SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

$$f_x^{(2)} = -f_x^{(1)} \quad \text{и} \quad f_z^{(2)} = -f_z^{(1)},$$

что влечет за собой то, что в (14) следует полагать

$$A_m^{(2)} = 0, \quad B_m^{(2)} = 0, \quad (m = 0, 1, 2).$$

Тогда, решениями уравнений (12) в случае продольных колебаний пластины будут

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_m(z, k, p) &= A_m^{(1)}(k, p) ch \alpha_m z; \\ \tilde{\psi}_m(z, k, p) &= B_m^{(1)}(k, p) sh \beta_m z, \quad (m = 0, 1, 2). \end{aligned} \quad (15)$$

Перемещения U_m и W_m также представим в виде (12)

$$\begin{aligned} W_m(x, z, t) &= \int_0^\infty \frac{\sin kx}{-\cos kx} \left\{ dk \int_{(L)} \tilde{W}_m(z, k, p) e^{pt} dp; \right. \\ U_m(x, z, t) &= \left. \int_0^\infty \frac{\cos kx}{\sin kx} \right\} dk \int_{(L)} \tilde{U}_m(z, k, p) e^{pt} dp. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя (12) и (16) в выражение перемещения (10), для преобразованных функций \tilde{U}_m и \tilde{W}_m будем иметь

$$\tilde{U}_m = k \tilde{\varphi}_m - \frac{\partial}{\partial z} \tilde{\psi}_m, \quad \tilde{W}_m = \frac{\partial}{\partial z} \tilde{\varphi}_m - k \tilde{\psi}_m. \quad (17)$$

Подстановка (15) в (17) дает выражение

$$\begin{aligned} \tilde{U}_m &= k A_m^{(1)} ch(\alpha_m z) - \beta_m B_m^{(1)} ch(\beta_m z); \\ \tilde{W}_m &= \alpha_m A_m^{(1)} sh(\alpha_m z) - k B_m^{(1)} sh(\beta_m z). \end{aligned} \quad (18)$$

Разложим правые части выражений (18) в степенные ряды по степеням αz и βz . Для этого используем стандартные разложения гиперболических функций в степенные ряды, получим

$$\begin{aligned} \tilde{U}_m &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[k \alpha_m^{2n} \cdot A_m^{(1)} - \beta_m^{2n+1} B_m^{(1)} \right] \frac{z^{2n}}{(2n)!}; \\ \tilde{W}_m &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_m^{2n+2} \cdot A_m^{(1)} - k \beta_m^{2n+1} B_m^{(1)} \right] \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned} \quad (19)$$

В качестве искоемых функций в уравнениях колебания трехслойной пластинки примем главные части преобразованных перемещений \tilde{U}_0 и \tilde{W}_0 такой поверхности нулевого слоя, расстояние от поверхности $z = 0$ которой определяется формулой

$$\xi = \chi \cdot h_0, \quad -1 \leq \chi < 0; \quad 0 \leq \chi < 1,$$

где χ - постоянное число, удовлетворяющее неравенству $-1 \leq \chi \leq 1$. Для этого в уравнениях (19) примем $z = \xi$, $m = 0$ и $n = 0$. Тогда введя обозначения $\tilde{U}_0^{(0)}$ и $\tilde{W}_0^{(0)}$ получим

$$A_0^{(1)} = \frac{1}{\xi} \frac{\tilde{W}_0^{(0)} - k \tilde{U}_0^{(0)}}{\alpha_0^2 - k^2}; \quad \beta_0 B_0^{(1)} = \frac{k}{\xi} \frac{\tilde{W}_0^{(0)} - \alpha_0^2 \tilde{U}_0^{(0)}}{\alpha_0^2 - k^2}.$$

Введем обозначения

$$q_m = 1 - \lambda_m \mu_m^{-1}.$$

Подставляя решения (18) в контактные условия (9) при $z = h_0$ получим

Систему

$$\begin{aligned} k A_1^{(0)} ch \alpha_0 h_0 - \beta_0 B_1^{(0)} ch \beta_0 h_0 &= \\ = k A_1^{(1)} ch \alpha_1 h_0 - \beta_1 B_1^{(1)} ch \beta_1 h_0; & \\ \alpha_0 A_1^{(0)} sh \alpha_0 h_0 - k B_1^{(0)} sh \beta_0 h_0 &= \\ = \alpha_1 A_1^{(1)} sh \alpha_1 h_0 - k B_1^{(1)} sh \beta_1 h_0, & \end{aligned} \quad (20)$$

которая, является системой двух алгебраических уравнений относительно двух неизвестных $A_1^{(1)}$ и $B_1^{(1)}$. Решив эту систему будем иметь

$$\begin{aligned} A_1^{(1)} &= \frac{1}{(\alpha_0^2 - k^2) \Delta_1^0} \left[\frac{1}{\xi} \left(\Delta_{11}^0 + \frac{k}{\beta_0} \Delta_{12}^0 \right) \tilde{W}_0^{(1)} - \right. \\ &\quad \left. - \left(k \Delta_{11}^0 + \frac{\alpha_0^2}{\beta_0} \Delta_{12}^0 \right) \tilde{U}_0^{(1)} \right]; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} B_1^{(1)} &= \frac{1}{(\alpha_0^2 - k^2) \Delta_1^0} \left[\frac{1}{\xi} \left(\Delta_{21}^0 + \frac{k}{\beta_0} \Delta_{22}^0 \right) \tilde{W}_0^{(1)} - \right. \\ &\quad \left. - \left(k \Delta_{21}^0 + \frac{\alpha_0^2}{\beta_0} \Delta_{22}^0 \right) \tilde{U}_0^{(1)} \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1^0 &= \begin{vmatrix} k ch \alpha_1 h_0 & -\beta_1 ch \beta_1 h_0 \\ \alpha_1 sh \alpha_1 h_0 & -k sh \beta_1 h_0 \end{vmatrix} = \beta_1 \alpha_1 \times \\ &\times sh(\alpha_1 h_0) ch(\beta_1 h_0) - k^2 sh(\beta_1 h_0) ch(\alpha_1 h_0); \\ \Delta_{11}^0 &= \alpha_0 \beta_1 sh(\alpha_0 h_0) ch(\beta_1 h_0) - k^2 sh(\beta_1 h_0) ch(\alpha_0 h_0); \\ \Delta_{12}^0 &= k [\beta_0 ch(\beta_0 h_0) sh(\beta_1 h_0) - \beta_1 sh(\beta_0 h_0) ch(\beta_1 h_0)]; \\ \Delta_{21}^0 &= k [\alpha_0 sh(\alpha_0 h_0) ch(\alpha_1 h_0) - \alpha_1 sh(\alpha_1 h_0) ch(\alpha_0 h_0)]; \\ \Delta_{22}^0 &= \alpha_1 \beta_0 ch(\beta_0 h_0) sh(\alpha_1 h_0) - k^2 sh(\beta_0 h_0) ch(\alpha_1 h_0). \end{aligned} \quad (23)$$

Представим напряжения $\sigma_{xz}^{(m)}$, также как (16) т.е.

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(m)}(x, z, t) &= \int_0^\infty \frac{\cos kx}{\sin kx} \left\{ dk \int_{(l)} \tilde{\sigma}_{xz}^{(m)}(z, k, p) e^{pt} dp; \right. \\ \sigma_{zz}^{(m)}(x, z, t) &= \left. \int_0^\infty \frac{\sin kz}{-\cos kz} \right\} dk \int_{(l)} \tilde{\sigma}_{zz}^{(m)}(z, k, p) e^{pt} dp. \end{aligned} \quad (24)$$

Тогда для, преобразованных величин $\tilde{\sigma}_{xz}^{(m)}$ в соответствии с формулами для напряжений (11) будем иметь формулы

$$\tilde{\sigma}_{xz}^{(m)}(z, k, p) = \mu_m \left(2k \frac{\partial}{\partial z} \tilde{\varphi}_m(z, k, p) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{\psi}_m(z, k, p) - k^2 \tilde{\psi}_m(z, k, p) \right); \quad (25)$$

$$\tilde{\sigma}_{zz}^{(m)}(z, k, p) = \lambda_{1m} \left(-k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tilde{\varphi}_m(z, k, p) + 2\mu_m \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{\varphi}_m(z, k, p) - k \frac{\partial}{\partial z} \tilde{\psi}_m(z, k, p) \right).$$

Постановка решения (15) в (25) приводит и выражениям

$$\tilde{\sigma}_{xz}^{(m)}(z, k, p) = \tilde{\mu}_m \left(2k \alpha_m A_1^{(m)} sh(\alpha_m z) - (\beta_m^2 + k^2) B_1^{(m)} sh(\beta_m z) \right) \quad (26)$$

$$\tilde{\sigma}_{zz}^{(m)}(z, k, p) = \tilde{\lambda}_{1m} (\alpha_m^2 - k^2) A_1^{(m)} ch(\alpha_m z) + 2\tilde{\mu}_m (\alpha_m^2 A_1^{(m)} ch(\alpha_m z) - k \beta_m B_1^{(m)} ch(\beta_m z)).$$

С учетом (24), (26) граничные условия (7) можно записать как

$$\begin{aligned} & 2k \alpha_m A_1^{(m)} sh(\alpha_m z) - \\ & - (\beta_m^2 + k^2) B_1^{(m)} sh(\beta_m z) = \tilde{\mu}_m^{-1} \tilde{f}_x^{(m)}(k, p); \\ & \tilde{q}_m (\alpha_m^2 - k^2) A_1^{(m)} ch(\alpha_m z) - 2(\alpha_m^2 A_1^{(m)} ch(\alpha_m z) - \\ & - k \beta_m B_1^{(m)} ch(\beta_m z)) = \tilde{\mu}_m^{-1} \tilde{f}_z^{(m)}(k, p). \end{aligned} \quad (27)$$

Учитывая (19) и в соответствии с указанными выше соображениями, относительно граничных условий в первом уравнении системы (27) положим $m = 1$, а во втором $m = 2$. Получим

$$\begin{aligned} & 2k \alpha_1 A_1^{(1)} sh(\alpha_1 z) - \\ & - (\beta_1^2 + k^2) B_1^{(1)} sh(\beta_1 z) = \tilde{\mu}_1^{-1} \tilde{f}_x^{(1)}(k, p); \\ & \tilde{q}_1 (\alpha_1^2 - k^2) A_1^{(1)} ch(\alpha_1 z) - 2(\alpha_1^2 A_1^{(1)} ch(\alpha_1 z) - \\ & - k \beta_1 B_1^{(1)} ch(\beta_1 z)) = \tilde{\mu}_1^{-1} \tilde{f}_z^{(1)}(k, p). \end{aligned} \quad (28)$$

Подставляя сюда значения постоянных $A_1^{(1)}$, $B_1^{(1)}$ по формулам (28) и (29) и разлагая в степенные ряды по степеням толщиной координаты гиперболические функции, входящие в выражения полученных таким образом уравнений, будем иметь общие уравнения симметричных колебаний трехслойной пластинки, имеющие бесконечно высокие порядки по производным. Считая выполненными условия усечения бесконечных рядов, указанных в работе [7], будем ограничиваться нулевым или первыми членами разложений и получим уравнения колебания трехслойной пластинки, пригодные для применения при решении прикладных задач колебания пластин

$$\begin{aligned} & \left\{ A_{11} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + A_{12} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + A_{13} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \right. \\ & + A_{14} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + A_{15} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{16} \left. \right\} \frac{\partial}{\partial x} W_0^{(0)}(x, t) + \\ & + \left\{ B_{11} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + B_{12} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + B_{13} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \right. \\ & + B_{14} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + B_{15} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left. \right\} U_0^{(0)}(x, t) = \\ & = \left\{ S_{11} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + S_{12} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + S_{13} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \right. \\ & + S_{14} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + S_{15} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + S_{16} \left. \right\} f_x^{(1)}(x, t) \quad (29) \\ & \left\{ A_{21} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + A_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + A_{23} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \right. \\ & + A_{24} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + A_{25} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{26} \left. \right\} W_0^{(0)}(x, t) + \\ & + \left\{ B_{21} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + B_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + B_{23} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \right. \\ & + B_{24} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + B_{25} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{26} \left. \right\} \frac{\partial}{\partial x} U_0^{(0)}(x, t) = \\ & = \left\{ S_{21} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + S_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + S_{23} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \right. \\ & + S_{24} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + S_{25} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + S_{26} \left. \right\} f_z^{(2)}(x, t), \end{aligned}$$

где A_{kj} , B_{kj} или S_{kj} :

$$A_{13} = -(1 + 2q_0) \frac{z_1 h_0^4}{12} - (4 + 6q_1 - 9q_0 q_1) \frac{z_1^3 h_0^2}{36};$$

$$\dots\dots A_{26} = 1 - q_2;$$

$$B_{11} = -\xi \left(\frac{3(1 - q_1)(q_0 - 1)}{a_0^2} - \frac{1}{b_1^2} \right) \frac{1}{a_1^2} \frac{z_1 h_0^2}{6} - \xi \frac{q_1 - 1}{a_1^2 b_1^2} \frac{z_1^3}{6};$$

$$\dots\dots B_{26} = -\xi(1 + q_2);$$

$$S_{i1} = \xi \mu_i^{-1} \frac{1}{a_i^2 b_i^2} \frac{h_0^4}{12}; \dots S_{i6} = \xi \mu_i^{-1},$$

где $(i = 1, 2)$; $z_1 = h_0 + h_1$; $z_2 = h_0 + h_2$;

$$q_m = 1 - \frac{\lambda_m}{\mu_m}; \quad a_m, b_m - \text{соответственно}$$

скорости продольных и поперечных волн в

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971
 ISI (Dubai, UAE) = 0.829
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 8.997
 SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

материале пластинки. При этом перемещения точек пластинки определяются по формулам

$$U_0(x, z, t) = \left[(1 - q_0) \frac{z^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (1 - q_0) \frac{z^2}{2} \times \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1 \right] U_0^{(0)}(x, z, t) - \frac{1}{\xi} q_0 \frac{z^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} W_0^{(0)}(x, z, t);$$

$$W_0(x, z, t) = \frac{1}{\xi} \left[\left(\frac{1}{b_0^2} + q_0 \right) \frac{z^3}{6} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (1 + q_0) \frac{z^3}{6} \times \frac{\partial^2}{\partial x^2} + z \right] W_0^{(0)}(x, z, t) + q_0 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \frac{z^3}{6} \frac{\partial}{\partial x} U_0^{(0)}(x, z, t). \quad (30)$$

Частный случай. Постановка прикладной задачи и её решение. Рассмотрим задачу о симметричных колебаниях заземленной в продольном направлении пластины, при $x = 0$ и $x = l$, где l - длина пластинки в направлении оси Ox . В качестве уравнений колебания примем систему (29). Граничные условия задачи имеют вид

$$U_0^{(0)} = 0; \quad \frac{\partial^2 U_0^{(0)}}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial W_0^{(0)}}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial^3 W_0^{(0)}}{\partial x^3} = 0.$$

Начальные условия считаются нулевыми.

Решение системы уравнений (29), удовлетворяющее условиям закрепления торцов, а также функции внешних воздействий представим в виде

$$U_0^{(0)} = \sum_{m=1}^{\infty} u(t) \sin \frac{m\pi x}{l}; \quad W_0^{(0)} = \sum_{m=1}^{\infty} w(t) \cos \frac{m\pi x}{l};$$

$$f_x = \sum_{m=1}^{\infty} f_{xm}(t) \sin \frac{m\pi x}{l}; \quad f_z = \sum_{m=1}^{\infty} f_{zm}(t) \cos \frac{m\pi x}{l}. \quad (31)$$

Подстановка (31) в (29) приводит к системе двух дифференциальных уравнений четвертого порядка относительно функций $u(t)$ и $w(t)$.

Задача решена численно при следующих значениях физико-механических и геометрических параметров трехслойной пластинки:

$$\xi = 0.9h_0; \quad l = 0.4 \text{ m}; \quad h_0 = 0.04 \text{ m};$$

$$h_1 = 0.001 \text{ m}; \quad h_2 = 0.001 \text{ m}; \quad \rho_0 = 30 \text{ kg/m}^3;$$

$$\rho_1 = 2700 \text{ kg/m}^3; \quad \rho_2 = 2700 \text{ kg/m}^3;$$

$$E_0 = 0.165 \cdot 10^9 \text{ Pa}; \quad E_1 = 69 \cdot 10^9 \text{ Pa};$$

$$E_2 = 69 \cdot 10^9 \text{ Pa}; \quad \nu_0 = 0.03125; \quad \nu_1 = 0.33;$$

$$\nu_2 = 0.33; \quad f_{xm}(t) = t^2; \quad f_{zm}(t) = 3t^2.$$

Результаты представлены на рис.2-3 в виде графиков продольного и поперечного перемещений точек срединного слоя.

Результаты расчетов. На рис.2-3 приведены графики зависимостей продольного и поперечного перемещений $U_0(x, t)$ и $W_0(x, t)$ от времени при различных значениях координаты x .

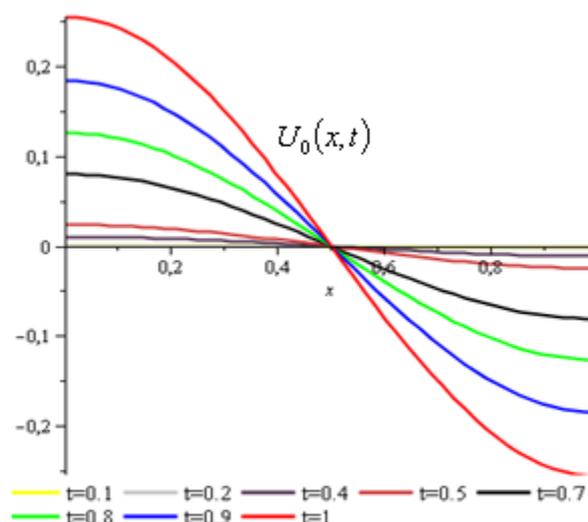


Рис.2. Зависимости перемещений $U_0(x, t)$ от времени при различных значениях координаты x .

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971
ISI (Dubai, UAE) = 0.829
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
ПИИЦ (Russia) = 0.126
ESJI (KZ) = 8.997
SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

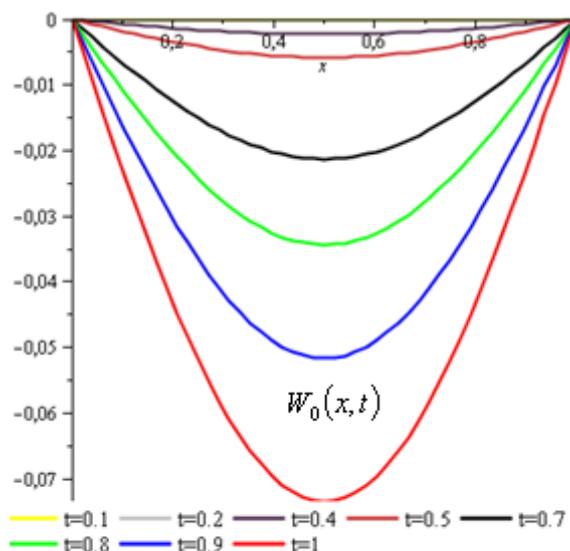


Рис.3. Зависимости перемещений $W_0(x, t)$ от времени при различных значениях координаты x .

Из приведенных графиков на рис.2 следует, что амплитуды продольного перемещения слоя $U_0(x, t)$ в начале процесса имеют небольшие отклонения от нулевой отметки. В моменты времени больших, чем одной пятой части действия нагрузок, т.е. при $t > 0,2$, они начинают резко возрастать для сечений пластинки, расположенных до середины пластинки, т.е. до $x < 0,5$. Это указывает на то, что точки сечений пластинки, находящиеся левее срединного сечения $x = 0,5$ получают положительные перемещения, т.е. продольные волокна пластинки в левой ее половине испытывают растяжения.

С другой стороны в тех же моментах времени точки сечений пластинки, находящиеся правее срединного сечения $x = 0,5$, получают отрицательные перемещения, т.е. продольные волокна пластинки в правой ее половине испытывают сжатие. Данное двойное поведение сечений, находящихся по разным сторонам срединного сечения пластинки, полностью согласуется с физической сущностью решаемой задачи.

В поперечном направлении амплитуда поперечного перемещения слоя $W_0(x, t)$ в начальный момент времени очень мала, которая начинает возрастать с течением времени. Деформация слоя в поперечном направлении становится значительной с течением времени (рис.3).

При этом на торцах слоя $W_0(x, t)$ равна нулю. Максимальные значения $W_0(x, t)$ наблюдаются в сечении $x = 0,5$ в конце времени расчета при $t = 1$. Это показывает, что амплитуды $W_0(x, t)$ в

сечениях срединного слоя возрастают с течением времени (рис.3). Значение $W_0(x, t)$ в точке максимума небольшое и равно 0.08, что примерно на один порядка меньше, чем соответствующее значение главной части продольного перемещения.

Следовательно, можно сделать вывод о том, что при симметричных колебаниях трехслойной пластинки можно пренебречь поперечными перемещениями точек. С другой стороны ясно, что появление незначительных поперечных перемещений точек пластинки вызвано действием продольных внешних нагрузок f_x , на лицевой и обратной сторонах пластинки. Эти перемещения незначительны и на порядок меньше по сравнению с продольными перемещениями. Поэтому, можно пренебречь поперечными перемещениями точек слоев.

Данный фактор также соответствует физической сущности поставленной задачи.

Выводы.

Разработана теория нестационарных симметричных колебаний трехслойной упругой пластинки в плоской постановке свободной от гипотез и предпосылок. Предложены общие уравнения колебания нестационарных симметричных колебаний трехслойной упругой пластинки, в плоской постановке из которых, в частных случаях, следуют уравнения колебания упругих трехслойных пластин, для двухслойных упругих пластин, однородных упругих пластин.

Разработаны эффективная математическая модель, методика расчёта, вычислительный алгоритм и некоторые аналитические решения расчета колебаний трехслойной пластинки с

Impact Factor:	ISRA (India) = 4.971	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
	ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.126	PIF (India) = 1.940
	GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 8.997	IBI (India) = 4.260
	JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	OAJI (USA) = 0.350

заданными граничными условиями при динамическом нагружении.

References:

1. Aleksandrov, A.Ja., & Kurshin, L.M. (1968). *Trehstojnye plastinki i obolochki. Prochnost', ustojchivost', kolebanija.* (pp.245-308). Moscow: Mashinostroenie, t.2.
2. Lexniskiy, S.G. (1977). *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela.* (p.416). Moscow: Nauka.
3. Sarrera, E. (2001). Developments ideas and evaluations based upon the Reissner's mixed theorem in the modeling of multilayered plates and shells. *Appl. Mech. Rev.* 54(4), pp. 301-329.
4. Ambarsumyan, S.A. (1987). *Teoriya anizotropnix plastin.* (p.493). Moscow: Nauka.
5. Reissner, E. (1984). On a certain mixed variational theory and a proposed application. *Int. Z. Numer. Methods Eng.* 20, pp. 1366-1368.
6. Ren, Z.G. (1986). Bending theory of laminated plates. *J.Comp.Sci. Technol.* 27, pp. 225-239.
7. Grigoluk, Je.I., & Selezov, I.T. (1973). *Neklassicheskie teorii kolebanij sterzhnej, plastin i obolochek.* Itogi nauki i tehniki. Ser. Mehanika deform. tverdyh tel, T. 5. (p.272). Moscow: VINITI.
8. Petrashen', G.I., & Hinen, Je.V. (1968). *Ob inzhenernyh uravnenijah kolebanij neideal'no-uprugih plastin.* Trudy MIAN. T. 95, (pp.151-183). L.: Nauka.
9. Petrashen', G.I., & Hinen, Je.V. (1971). Ob usloviyah primenimosti inzhenernyh uravnenij neideal'no-uprugih plastin. *Voprosy dinamiki teorii rasprostraneniya seismicheskoy volny*, № 11, Moscow: Nauka, pp. 48-56.
10. Filippov, I.G., & Cheban, V.G. (1988). *Matematicheskaja teorija kolebanij uprugih i vajzakouprugih plastin i sterzhnej.* (p.188). Kishinev: «Shtiinca».
11. Hudojnazarov, H. H. (2003). *Nestacionarnoe vzaimodejstvie cilindricheskix obolochek i sterzhnej s deformiruemoj sredoj.* (p.325). T.: Izd-vo med.lit. imeni Abu Ali Ibn Sina.
12. Mirzakobilov, N.H. (1992). *Kolebanija trehslojnyh plastin chastnogo vida.* Diss. na sois. uch. st. kand. nauk. (p.139). Moskva.
13. Khudoynazarov, Kh., & Khudoyberdiyev, Z. (2018). Symmetrical vibrations of a three-layered elastic plate. *Int. J. of Advanced Research in Science, Engineering and Technology*, 5(10), pp.7117-7121.