Impact Factor:

ISRA (India)	= **4.971**	**SIS** (USA)	= **0.912**	**ICV** (Poland)	= **6.630**
ISI (Dubai, UAE)	= **0.829**	**РИНЦ** (Russia)	= **0.126**	**PIF** (India)	= **1.940**
GIF (Australia)	= **0.564**	**ESJI** (KZ)	= **8.997**	**IBI** (India)	= **4.260**
JIF	= **1.500**	**SJIF** (Morocco)	= **5.667**	**OAJI** (USA)	= **0.350**

QR – Issue QR – Article

SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2021 **Issue:** 01 **Volume:** 93

Published: 16.01.2021 **http://T-Science.org**

Anastasia Andreevna Gorepekina
Bryansk State University named after I.G. Petrovsky
graduate student, Russia

Marina Mikhailovna Sorokina
Bryansk State University named after I.G. Petrovsky
doctor of physical and mathematical sciences,
associate professor, Russia

ON FINITE τ-MINIMAL NON-$\mathfrak{F}$ -GROUPS FOR Ω-FOLIATED FORMATION $\mathfrak{F}$

***Abstract**: Only finite groups are considered. Properties of τ-minimal non-$\mathfrak{F}$-groups are studied for the Ω-foliated formation $\mathfrak{F}$, where τ is a subgroup functor. A group G is called a τ-minimal non-$\mathfrak{F}$-group if $G \notin \mathfrak{F}$, but every proper τ-subgroup of G belongs to the class $\mathfrak{F}$. We have established necessary and sufficient conditions under which a group G is a τ-minimal non-$\mathfrak{F}$-group. We have researched the influence of the properties of τ-minimal non-$\mathfrak{F}$-groups on the structure of the Ω-foliated formation $\mathfrak{F}$.*

***Key words**: a finite group, a class of groups, a formation, an Ω-foliated formation, a τ-minimal non-$\mathfrak{F}$-group.*

***Language**: Russian*

***Citation**: Gorepekina, A. A., & Sorokina, M. M. (2021). On finite τ-minimal non-$\mathfrak{F}$-groups for Ω-foliated formation $\mathfrak{F}$. *ISJ Theoretical & Applied Science, 01 (93),* 112-116.

***Soi**: http://s-o-i.org/1.1/TAS-01-93-19 ***Doi**: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2021.01.93.19

***Scopus ASCC**: 2602.*

О КОНЕЧНЫХ τ-МИНИМАЛЬНЫХ НЕ $\mathfrak{F}$-ГРУППАХ ДЛЯ Ω-РАССЛОЕННОЙ ФОРМАЦИИ $\mathfrak{F}$

***Аннотация**: Рассматриваются только конечные группы. Изучаются свойства τ-минимальных не $\mathfrak{F}$-групп для Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$, где τ – подгрупповой функтор. Группа G называется τ-минимальной не $\mathfrak{F}$-группой, если $G \notin \mathfrak{F}$, но каждая собственная τ-подгруппа группы G принадлежит классу $\mathfrak{F}$. Установлены необходимые, достаточные условия, при которых группа G является τ-минимальной не $\mathfrak{F}$-группой. Исследовано влияние свойств τ-минимальных не $\mathfrak{F}$-групп на строение Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$.*

***Ключевые слова**: конечная группа, класс групп, формация, Ω-расслоенная формация, τ-минимальная не $\mathfrak{F}$-группа.*

Введение

Теория классов групп занимает одно из центральных мест в современной алгебре. В теории конечных групп важную роль играет понятие τ-минимальной не $\mathfrak{F}$-группы, где $\mathfrak{F}$ – некоторый класс конечных групп. Группа G называется минимальной не $\mathfrak{F}$-группой, если $G \notin \mathfrak{F}$, но всякая собственная подгруппа группы G принадлежит классу $\mathfrak{F}$. К таким группам относятся хорошо известные группы Миллера-Морено (минимальные неабелевы группы), группы Шмидта (минимальные ненильпотентные группы) и другие (см., например, [12, глава VI]). Большой вклад в изучение минимальных не $\mathfrak{F}$-групп для произвольной формации $\mathfrak{F}$ внес В.Н. Семенчук (см., например, [6–8]). С развитием теории подгрупповых функторов стали рассматриваться τ-минимальные не $\mathfrak{F}$-группы, где τ – подгрупповой функтор. Исследованию τ-минимальных не $\mathfrak{F}$-групп для локальной формации $\mathfrak{F}$ уделяется большое внимание в монографии А.Н. Скибы «Алгебра формаций» [11]. Исследованиями в данном направлении занимались В.Н. Семенчук, В.Ф. Велесницкий и др. (см., например, [9, 10, 16]).

В 1999 году В.А. Ведерников ввел в рассмотрение Ω-расслоенные формации конечных групп (см., например [13]). Исследованием различных видов Ω-расслоенных формаций занимались Д.Г. Коптюх, М.А. Корпачева, Ю.А. Еловикова, С.В. Чиспияков, Е.Н. Демина, М.М. Сорокина и другие (см., например, [2, 3, 5]).

Целью данной работы является изучение свойств τ-минимальных не $\mathfrak{F}$-групп для Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$. В работе решены следующие задачи: в теоремах 1 и 2 соответственно получены достаточные и необходимые условия, при которых группа G является τ-минимальной не $\mathfrak{F}$-группой; в теореме 3 исследовано влияние свойств τ-минимальных не $\mathfrak{F}$-групп на строение Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$.

Рассматриваются только конечные группы. В работе используются классические методы теории групп и теории классов групп. Используемые определения и обозначения для групп и классов групп стандартны, их можно найти в [1]. Приведем лишь некоторые из них.

Классом групп называется множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой и все группы, ей изоморфные [12, с. 9]. Если $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ – классы групп, то

$$\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 = (G \mid \text{существует } N \lhd G, \text{ где } N \in \mathfrak{F}_1, G/N \in \mathfrak{F}_2)$$ [1, с. 338, с. 566].

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если выполняются следующие два условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$, то $G/N \in \mathfrak{F}$;

2) если $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$ [1, с. 272].

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если выполняются следующие два условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$, то $N \in \mathfrak{F}$;

2) если $G = N_1N_2$, $N_1 \lhd G$, $N_2 \lhd G$, $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$ [1, с. 274].

Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-*корадикал* группы G, т.е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, фактор-группа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ – формация. Через $G_{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-*радикал* группы $\mathfrak{F}$, т.е. наибольшая нормальная подгруппа группы G, принадлежащая классу Фиттинга $\mathfrak{F}$. В дальнейшем, $\mathbb{P}$ обозначает множество всех простых чисел. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустое множество групп. Через $(\mathfrak{X})$ обозначается класс групп, порожденный $\mathfrak{X}$; в частности, (G) – класс всех групп, изоморфных группе G; $K(G)$ – класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G. Пусть $\mathfrak{E}$ – класс всех конечных групп, $\mathfrak{I}$ – класс всех простых конечных групп, Ω – непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп, $p \in \mathbb{P}$, $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда $\mathfrak{F}_p$ и $\mathfrak{F}_\pi$ – соответственно классы всех p-групп и π-групп, принадлежащих классу $\mathfrak{F}$. Если $K(G) \subseteq \Omega$, то группа G называется Ω-*группой*; $\mathfrak{E}_\Omega$ – класс всех Ω-групп; $O_\Omega(G) = G_{\mathfrak{E}_\Omega}$. Через $\mathfrak{S}_{cA}$ обозначается класс всех тех конечных групп, у которых каждый главный A-фактор является центральным. Функции

$$f : \Omega \cup \{\Omega'\} \to \{\text{формации групп}\},$$

где $f(\Omega') \neq \emptyset$,

$$h : \mathfrak{I} \to \{\text{формации групп}\},$$

$$\varphi : \mathfrak{I} \to \{\text{непустые формации Фиттинга}\},$$

принимающие одинаковые значения на изоморфных группах из области определения, называются соответственно *Ω-функцией*, *F-функцией* и *FR-функцией*. Формация

$$\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/G_{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для любого } A \in K(G) \cap \Omega)$$

называется *Ω-расслоенной формацией* с *Ω-спутником f* и *направлением φ* (*кратко, $\Omega\varphi$-расслоенной формацией*) и обозначается $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$. Формация

$$\mathfrak{H} = (G \in \mathfrak{E} \mid G/G_{\varphi(A)} \in h(A) \text{ для любого } A \in K(G))$$

называется *расслоенной формацией со спутником h* и *направлением φ* (*кратко, φ-расслоенной формацией*) и обозначается $\mathfrak{H} = F(h, \varphi)$ [15, с. 127]. Через φ_0 обозначается направление Ω-свободной (свободной) формации, т.е. $\varphi_0(A) = \mathfrak{E}_{A'}$ для любого $A \in \mathfrak{I}$; φ_2 – направление Ω-биканонической (биканонической) формации, т.е. $\varphi_2(A) = \mathfrak{E}_{A'}$ для любой неабелевой группы $A \in \mathfrak{I}$ и $\varphi_2(A) = \mathfrak{E}_{A'}\mathfrak{E}_A$ для любой абелевой группы $A \in \mathfrak{I}$; $\varphi_2{}'$ – направление Ω-канонической (канонической) формации, т.е. $\varphi_2{}'(A) = \mathfrak{E}_{A'}\mathfrak{E}_A$ для любого $A \in \mathfrak{I}$; φ_3 – направление Ω-композиционной (композционной) формации, т.е. $\varphi_3(A) = \mathfrak{S}_{cA}$ для любого $A \in \mathfrak{I}$ [15, с. 128]. Направление φ Ω-расслоенной (расслоенной) формации называется *b-направлением*, если $\varphi(A)\mathfrak{E}_A = \varphi(A)$ для любой абелевой группы $A \in \mathfrak{I}$; *b_A-направлением*, где $A \in \mathfrak{I}$, если $\varphi(A)\mathfrak{E}_A = \varphi(A)$; *$r$-направлением*, если $\varphi(A) = \mathfrak{E}_{A'}\varphi(A)$ для любой группы $A \in \mathfrak{I}$ [13, с. 56].

Пусть τ – отображение, которое ставит в соответствие каждой группе G некоторую непустую систему $\tau(G)$ ее подгрупп. Отображение τ называется *подгрупповым функтором*, если $(\tau(G))^\varphi = \tau(G^\varphi)$ для любого изоморфизма φ каждой группы G [4, с. 13]. Подгруппы группы G, принадлежащие $\tau(G)$, называются τ-*подгруппами* группы G.

Подгрупповой функтор τ называется *регулярным*, если для любой группы G выполняются два условия:

1) если $N \lhd G$, $M \in \tau(G)$, то $MN/N \in \tau(G/N)$;

2) если $M/N \in \tau(G/N)$, то $M \in \tau(G)$ [4, с. 197].

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга. Подгрупповой функтор τ назовем $\mathfrak{F}$ -

радикальным, если для любой группы G и для любой $N \in \tau(G)$ справедливо $G_{\mathfrak{F}} \cap N = N_{\mathfrak{F}}$. Пусть φ – FR-функция. Подгрупповой функтор τ назовем *φ-радикальным*, если τ является $\varphi(A)$-радикальным для всех $A \in \mathfrak{J}$. Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ – непустые классы Фиттинга. Подгрупповой функтор τ назовем $\mathfrak{F}_1$- $\mathfrak{F}_2$*-радикальным*, если τ является $\mathfrak{F}_1$-радикальным и $\mathfrak{F}_2$-радикальным.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *τ-замкнутой*, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$ [11, с. 23]. Ω-спутник Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$ называется *τ-замкнутым*, если все его значения являются τ-замкнутыми формациями.

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп, τ – подгрупповой функтор. Группа G называется *τ-минимальной не $\mathfrak{F}$-группой*, если $G \notin \mathfrak{F}$, но каждая собственная τ-подгруппа группы G принадлежит классу F [11, с. 38]. Через $M_\tau(\mathfrak{F})$ обозначается класс всех τ-минимальных не $\mathfrak{F}$ -групп.

Сформулируем известные результаты, используемые в работе.

Лемма 1 (Лемма 2 (1) [13, с. 57]). *Пусть $\mathfrak{F} = \Omega F(f,\varphi)$ – Ω-расслоенная формация с r-направлением φ. Тогда если $A \in \Omega$, $G/O_A(G) \in \mathfrak{F}$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Лемма 2 (Лемма 10 (1) [14, с. 1003]). *Пусть $A \in \Omega$, $\mathfrak{F}$ – Ω-расслоенная формация с внутренним Ω-спутником f и $b_A r$ -направлением φ. Тогда выполняется $\mathfrak{E}_A f(A) \subseteq \mathfrak{F}$.*

Лемма 3 (Лемма 3 [9, с. 429]). *Каждая группа G, не принадлежащая некоторому классу групп $\mathfrak{X}$, содержит по крайней мере одну минимальную не $\mathfrak{X}$ -группу.*

Лемма 4 (Теорема 5 [15, с. 132]). *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Тогда Ω-расслоенная формация $\mathfrak{F} = \Omega F(\mathfrak{X},\varphi)$ с направлением φ, где $\varphi_0 \le \varphi$, обладает единственным минимальным Ω-спутником f таким, что*

$$f(\Omega') = form(G/O_\Omega(G) | G \in \mathfrak{X}),$$
$$f(A) = form(G/G_{\varphi(A)} | G \in \mathfrak{X}) \text{ для всех }$$
$$A \in K(\mathfrak{X}) \cap \Omega \text{ и } f(A) = \emptyset, \text{ если } A \in \Omega \backslash K(\mathfrak{X}).$$

Лемма 5 (Лемма 1 (7) [13, с. 57]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, G – группа, $N \lhd G$. Тогда если $\mathfrak{F}$ – формация Фиттинга, $\mathfrak{E}_{A'}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$ и $N \in \mathfrak{E}_{A'}$, то $(G/N)_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}/N$.*

В следующей теореме для Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$ установим достаточные условия, при которых конечная группа G является τ-минимальной не $\mathfrak{F}$ -группой.

Теорема 1.

Пусть G – группа, $A \in \Omega \cap K(G)$, φ – r-направление Ω-расслоенной формации, τ – регулярный $\mathfrak{E}_A$-$\varphi(A)$-радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая Ω-расслоенная формация с направлением φ и Ω-спутником f. Если $G/O_A(G) \in \mathfrak{F}$, $G_{\varphi(A)} \subseteq H$ для любой τ-подгруппы H группы G и $G/G_{\varphi(A)} \in M_\tau(f(A))$, то $G \in M_\tau(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Пусть $G/O_A(G) \in \mathfrak{F}$, $G_{\varphi(A)} \subseteq H$ для любой τ-подгруппы H группы G и $G/G_{\varphi(A)} \in M_\tau(f(A))$. Покажем, что $G \in M_\tau(\mathfrak{F})$. Так как $G/G_{\varphi(A)} \notin f(A)$ и $A \in \Omega \cap \mathrm{K}(G)$, то по определению Ω-расслоенной формации $G \notin \mathfrak{F}$. Пусть H – собственная τ-подгруппа группы G. Покажем, что $H \in \mathfrak{F}$. В силу леммы 1, установим, что $H/O_A(H) \in \mathfrak{F}$. Поскольку $H \in \tau(G)$, то, ввиду регулярности подгруппового функтора τ, получаем, что $HO_A(G)/O_A(G) \in \tau(G/O_A(G))$. Так как по условию теоремы $G/O_A(G) \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая формация, то $HO_A(G)/O_A(G) \in \mathfrak{F}$ и, значит, $H/H \cap O_A(G) \in \mathfrak{F}$. Поскольку τ – $\mathfrak{E}_A$-радикальный подгрупповой функтор, то $H \cap O_A(G) = O_A(H)$ и $H/O_A(H) \in \mathfrak{F}$.

Покажем, что $H/H_{\varphi(A)} \in f(A)$. Из $H \in \tau(G)$ и регулярности подгруппового функтора τ получаем, что $HG_{\varphi(A)}/G_{\varphi(A)} \in \tau\big(G/G_{\varphi(A)}\big)$. Если $HG_{\varphi(A)}/G_{\varphi(A)} = G/G_{\varphi(A)}$, то $HG_{\varphi(A)} = G$ и, ввиду $G_{\varphi(A)} \subseteq H$, имеем $H = G$, что противоречит выбору H. Поэтому $HG_{\varphi(A)}/G_{\varphi(A)} < G/G_{\varphi(A)}$. Так как по условию $G/G_{\varphi(A)} \in M_\tau(f(A))$, то

$$HG_{\varphi(A)}/G_{\varphi(A)} \cong H/H \cap G_{\varphi(A)} \in f(A).$$

Тогда, в силу $\varphi(A)$-радикальности подгруппового функтора τ, справедливо $H/H_{\varphi(A)} \in f(A)$.

Таким образом, $A \in \Omega$, $H/O_A(H) \in \mathfrak{F}$ и $H/H_{\varphi(A)} \in f(A)$. Поскольку направление φ является r-направлением, то по лемме 1 получаем, что $H \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $G \in M_\tau(\mathfrak{F})$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть G – группа, $A \in \mathfrak{J}$, φ – r-направление расслоенной формации, τ – регулярный $\mathfrak{E}_A$-$\varphi(A)$-радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая расслоенная формация с направлением φ и спутником f. Если $G/O_A(G) \in \mathfrak{F}$, $G_{\varphi(A)} \subseteq H$ для любой τ-подгруппы H группы G и $G/G_{\varphi(A)} \in M_\tau(f(A))$, то $G \in M_\tau(\mathfrak{F})$.*

В следующей теореме для Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$ установим необходимые условия, при которых конечная группа G является τ-минимальной не $\mathfrak{F}$ -группой.

Теорема 2.

Пусть φ – r-направление Ω-расслоенной формации, τ – регулярный φ-радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая Ω-расслоенная формация с направлением φ и Ω-спутником f, $\Omega \subseteq K(\mathfrak{F})$. Если $G \in M_\tau(\mathfrak{F})$ и $G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$, то $G/G_{\varphi(A)} \in M_\tau(f(A))$ для некоторого $A \in \Omega \cap K(G)$.

Доказательство. Пусть $G \in M_\tau(\mathfrak{F})$ и $G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$. Если $G/G_{\varphi(B)} \in f(B)$ для любого $B \in \Omega \cap K(G)$, то $G \in \mathfrak{F}$, что невозможно.

Следовательно, $G/G_{\varphi(A)} \notin f(A)$ для некоторого $A \in \Omega \cap K(G)$.

Пусть $L/G_{\varphi(A)} \in \tau(G/G_{\varphi(A)})$ и $L/G_{\varphi(A)} < G/G_{\varphi(A)}$. Покажем, что $L/G_{\varphi(A)} \in f(A)$. Ввиду регулярности подгруппового функтора τ, L является собственной τ-подгруппой группы G. Из $G \in M_\tau(\mathfrak{F})$ получаем, что $L \in \mathfrak{F}$, и, значит, $L/L_{\varphi(B)} \in f(B)$ для любого $B \in \Omega \cap K(L)$.

Так как подгрупповой функтор τ является φ-радикальным, то $L \cap G_{\varphi(A)} = L_{\varphi(A)}$ и

$$L/L_{\varphi(A)} = L/L \cap G_{\varphi(A)} \cong LG_{\varphi(A)}/G_{\varphi(A)} = L/G_{\varphi(A)}.$$

Если $A \in K(L)$, то $L/L_{\varphi(A)} \in f(A)$ и, следовательно, $L/G_{\varphi(A)} \in f(A)$.

Пусть $A \notin K(L)$. Так как направление φ является r-направлением, то $L \in \mathfrak{E}_{A'} \subseteq \mathfrak{E}_{A'}\varphi(A) = \varphi(A)$ и, значит, $L_{\varphi(A)} = L$. Пусть f_1 – минимальный Ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F} = \Omega F(\mathfrak{F}, \varphi)$ и $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$, то по лемме 4 $f_1(A) \neq \emptyset$ и поэтому $L/G_{\varphi(A)} \cong L/L_{\varphi(A)} = 1 \in f_1(A)$. Поскольку f – Ω-спутник формации $\mathfrak{F}$, то, согласно лемме 4, $f_1 \leq f$. Поэтому $L/G_{\varphi(A)} \in f(A)$. Таким образом, $G/G_{\varphi(A)} \in M_\tau(f(A))$. Терема доказана.

<u>Следствие 2.</u> *Пусть φ – r-направление расслоенной формации, τ – регулярный φ-радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая расслоенная формация с направлением φ и спутником f, $K(\mathfrak{F}) = \mathfrak{I}$. Если $G \in M_\tau(\mathfrak{F})$, то $G/G_{\varphi(A)} \in M_\tau(f(A))$ для некоторого $A \in K(G)$.*

В следующей теореме исследуем влияние свойств τ-минимальных не $\mathfrak{F}$ -групп на строение Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$.

<u>Теорема 3.</u> *Пусть $A \in \Omega$, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая Ω-расслоенная формация с $b_A r$-направлением φ и внутренним Ω-спутником f, где τ – регулярный $\varphi(A)$-радикальный подгрупповой функтор. Если всякая τ-минимальная не $\mathfrak{F}$ -группа обладает минимальной нормальной подгруппой, содержащей $f(A)$-корадикал группы, то $M(f(A)) \cap \mathfrak{E}_A\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$.*

<u>Доказательство</u>. Пусть всякая τ-минимальная не $\mathfrak{F}$ -группа обладает минимальной нормальной подгруппой, содержащей $f(A)$-корадикал группы. Покажем, что $M(f(A)) \cap \mathfrak{E}_A\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$. Предположим, что найдется $G \in (M(f(A)) \cap \mathfrak{E}_A\mathfrak{F})\backslash\mathfrak{F}$. Тогда, согласно лемме 3, в G существует минимальная не $\mathfrak{F}$ -подгруппа H. Если $H < G$, то ввиду $G \in M(f(A))$, получаем $H \in f(A) \subseteq \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, $H = G$ и, значит, G – минимальная не $\mathfrak{F}$ -группа, а значит, и τ-минимальная не $\mathfrak{F}$ -группа.

По условию в группе G существует минимальная нормальная подгруппа N такая, что $G^{f(A)} \subseteq N$. Покажем, что $G/N \in f(A)$. Согласно теореме о гомоморфизмах, имеем

$$G/N \cong (G/G^{f(A)})/(N/G^{f(A)}).$$

По определению $f(A)$-корадикала $G/G^{f(A)} \in f(A)$. В силу того, что $f(A)$ – формация, получим, что $G/N \in f(A)$. Возможны следующие случаи.

Пусть N – A-группа. Тогда по лемме 2 $G \in \mathfrak{E}_A f(A) \subseteq \mathfrak{F}$. Противоречие.

Пусть N – A'-группа. Поскольку φ является r-направлением формации $\mathfrak{F}$, то, согласно лемме 5, $(G/N)_{\varphi(A)} = G_{\varphi(A)}/N$. Так как $G/N \in f(A)$ и $f(A)$ – формация, то $(G/N)/(G/N)_{\varphi(A)} \in f(A)$ и, значит, $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ (1). По условию $G \in M(f(A)) \cap \mathfrak{E}_A\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}_A\mathfrak{F}$ и, поэтому, справедливо $G/O_A(G) \in \mathfrak{F}$ (2). Из (1) и (2), ввиду леммы 1, получаем, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие.

Таким образом, $M(f(A)) \cap \mathfrak{E}_A\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

<u>Следствие 3.</u> *Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая расслоенная формация с b_A-направлением φ и внутренним спутником f, где τ – регулярный $\varphi(A)$-радикальный подгрупповой функтор для некоторого $A \in \mathfrak{I}$. Если всякая τ-минимальная не $\mathfrak{F}$ -группа обладает минимальной нормальной подгруппой, содержащей $f(A)$-корадикал группы, то $M(f(A)) \cap \mathfrak{E}_A\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$.*

<u>Замечание 1.</u> Поскольку направления φ_0, φ_2, φ_2', φ_3 являются r-направлениями, то из теорем 1 – 3 вытекают результаты для Ω-свободных, Ω-биканонических, Ω-канонических и Ω-композиционных (соответственно для свободных, биканонических, канонических и композиционных) формаций конечных групп.

References:

1. Doerk, K., & Nawkes, T. (1992). *Finite soluble groups.* (p.892). Walter de Gruyter, Berlin – New York.
2. Elovikov, A.B. (2009). Faktorizacii odnoporozhdennyh chastichno rassloennyh formacij. *Diskretnaya matematika*, T. 21, Vyp. 3, pp.99–118.

3. Elovikova, YU.A. (2006). Svojstva reshetki vsekh kratno Ω-kanonicheskih formacij. *Diskretnaya matematika*, T. 18, Vyp. 2, pp. 146–158.
4. Kamornikov, S.F., & Sel'kin, M.V. (2003). *Podgruppovye funktory i klassy konechnyh grupp*. (p.254). Minsk: Belaruskaya navuka.
5. Korpacheva, M.A., & Sorokina, M.M. (2006). O kriticheskih Ω-rassloennyh formaciyah konechnyh grupp. *Diskret. matem.*, T. 18, № 1, pp.106−115.
6. Semenchuk, V.N. (1979). Minimal'nye ne $\mathfrak{F}$-gruppy. *Algebra i logika*, T. 18, № 3, pp. 348–382.
7. Semenchuk, V. N. (1991). Rol' minimal'nyh ne $\mathfrak{F}$-grupp v teorii formacij. *Mat. zametki*, T. 98, № 1, pp. 110–115.
8. Semenchuk, V.N., & Vasiliev, A. F. (1984). *Harakterizaciya lokal'nyh formacij* $\mathfrak{F}$ *po zadannym svojstvam minimal'nyh ne* $\mathfrak{F}$*-grupp.* Issledovanie normal'nogo i podgruppovogo stroeniya konechnyh grupp. (pp.175-181). Mn..
9. Semenchuk, V.N., & Velesnickij, V.F. (2014). Konechnye gruppy s zadannymi svojstvami kriticheskih podgrupp. *Sib. matem. zhurn.*, T. 55, № 2, pp. 427–435.
10. Semenchuk, V.N., & Velesnickij, V. F. (2013). O konechnyh gruppah s obobshchenno subnormal'nymi kriticheskimi podgruppami. *Tr. In-ta matem.*, T. 21, № 1, pp. 98–101.
11. Skiba, A.N. (1997). *Algebra formacij.* (p.240). Minsk: Belaruskaya navuka.
12. Shemetkov, L.A. (1978). *Formacii konechnyh grupp*. (p.272). Moscow: Nauka.
13. Vedernikov, V.A. (2001). Maksimal'nye sputniki Ω-rassloennyh formacij i klassov Fittinga. *Tr. IMM UrO RAN*, T. 7, № 2, pp. 55–71.
14. Vedernikov, V.A., & Demina, E. N. (2010). Ω-rassloennye formacii mul'tioperatornyh T-grupp. *Sib. matem. zhurn*., T. 51, № 5, pp. 990–1009.
15. Vedernikov, V.A., & Sorokina, M.M. (2001). Ω-rassloennye formacii i klassy Fittinga konechnyh grupp. *Diskretnaya matematika*, T. 13, Vyp. 3, pp.125–144.
16. Velesnickij, V.F. (2014). O sverhrazreshimyh gruppah. *PFMT*, Vyp. № 2(19), pp. 42–45.