SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science
p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)
Year: 2021 Issue: 05 Volume: 97
Published: 27.05.2021 http://T-Science.org

QR – Issue QR – Article

Yu. R. Krakhmaleva
M. H. Dulati Taraz Regional University
candidate of technical sciences

CONSTRUCTION OF AN ORTHOGONAL MATRIX BY MEANS OF COMPUTER ALGEBRA MAPLE

***Abstract**: An automated mathematical program for constructing a 4th-order orthogonal matrix in the Maple system has been developed. The use of the computer algebra package significantly reduced the complexity of the computational process and increased its speed.*
***Key words**: Gram-Schmidt orthogonalization method, orthogonal matrix, orthonormal columns.*
***Language**: Russian*
***Citation**: Krakhmaleva, Y. R. (2021). Construction of an orthogonal matrix by means of computer algebra maple. *ISJ Theoretical & Applied Science, 05 (97),* 444-449.
***Soi**: http://s-o-i.org/1.1/TAS-05-97-75 ***Doi**: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2021.05.97.75
***Scopus ASCC**: 2600.*

ПОСТРОЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ СРЕДСТВАМИ КОМПЪЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ MAPLE

***Аннотация**: Разработаны автоматизированная математическая программа построения ортогональной матрицы 4-го порядка в системе Maple. Применение пакета компьютерной алгебры существенно снизило трудоемкость вычислительного процесса и повысило его скорость.*
***Ключевые слова**: Метод ортогонализации Грамма – Шмидта, ортогональная матрица, ортонормированные столбцы.*

Введение

В настоящее время научное программирование претерпевает серьезную трансформацию: развиваются интегрированные среды, основанные на алгоритмических языках, растет применение универсальных математических систем (Maple, Mathematics, MATLAB. MatCad и др.). Эти системы имеют дружественный интерфейс, реализуют множество стандартных и специальных математических операций, снабжены мощными графическими средствами и обладают собственными языками программирования. Все это предоставляет широкие возможности для эффективной работы специалистов разных профилей, о чем говорит активное применение математических пакетов в научных исследованиях и в преподавании.

Рассмотрим построение ортогональной матрицы в пакете компьютерной алгебры Maple . Пусть матрица имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

скалярное произведение векторов столбцов матрицы определяется по формуле:

$$(a_i, a_j) = (a_i)^T \cdot a_j = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})^T \cdot \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots \\ a_{nj}\end{pmatrix}$$

Как известно для построения ортогональной матрицы используют метод ортогонализации

Грамма – Шмидта для исходной матрицы A. Для этого необходимо подключить специализированный пакет *LinearAlgebra*. Вводим элементы квадратной матрицы A:

```
restart;
with(LinearAlgebra);

a11:=1;a12:=1;a13:=1;a14:=0;a21:=1;a22:=0;a23:=0;a24:=0;a31:=0;a32:=1;a33:=0;a34:=0;a41:=0;a42:=0;a43:=1;a44:=1;
A:=Matrix(4,[[a11,a12,a13,a14],[a21,a22,a23,a24],[a31,a32,a33,a34],[a41,a42,a43,a44]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Как известно, матрица A должна быть невырожденная, задаем условие с помощью условного оператора *if*:

```
DETA:=Determinant(A);
if DETA<>0 then print('Nevirogdena');
else print('Virogdena');
fi;
```

$$DETA := 1$$

Nevirogdena

Используя формулы:

$$b_1 = a_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}), \quad b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{|b_1|^2} b_1 = a_2 - \frac{1}{2} b_1,$$

$$b_3 = a_3 - \frac{(a_3, b_1)}{|b_1|^2} b_1 - \frac{(a_3, b_2)}{|b_2|^2} b_2 = a_3 - \frac{1}{2} \cdot b_1 - \frac{1}{3} \cdot b_2,$$

$$b_4 = a_4 - \frac{(a_4, b_1)}{|b_1|^2} b_1 - \frac{(a_4, b_2)}{|b_2|^2} b_2 - \frac{(a_4, b_{31})}{|b_3|^2} b_3,$$

вычисляем последовательно ортогональные столбцы b_1, b_2, b_3, b_4, используя команды *Multiply*, *Trancpose* :

```
B1:=Column(A,1);
A2:=Column(A,2);
A2B1:=Multiply(Transpose(A2),B1);
B1B1:=Multiply(Transpose(B1),B1);
B2:=A2-Multiply(B1,A2B1/B1B1);
A3:=Column(A,3);
A3B1:=Multiply(Transpose(A3),B1);
A3B2:=Multiply(Transpose(A3),B2);
B2B2:=Multiply(Transpose(B2),B2);
B3:=A3-Multiply(B1,A3B1/B1B1)-Multiply(B2,A3B2/B2B2);
A4:=Column(A,4);
```

```
A4B1:=Multiply(Transpose(A4),B1);
A4B2:=Multiply(Transpose(A4),B2);
A4B3:=Multiply(Transpose(A4),B3);
B3B3:=Multiply(Transpose(B3),B3);
B4:=A4-Multiply(B1,A4B1/B1B1)-Multiply(B2,A4B2/B2B2)-Multiply(B3,A4B3/B3B3);
```

$$B1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B2 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B3 := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, B4 := \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Из полученных столбцов B_1, B_2, B_3, B_4, составим матрицу B :

```
B12:=<<B1|B2>>;
B123:=<<B12|B3>>;
B:=<<B123|B4>>;
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Нормируем столбцы матрицы B и получаем ортонормированные столбцы Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, второй аргумент *Euclidean* команды *VectorNorm* указывает на евклидову норму :

```
Q1:=VectorScalarMultiply(B1, 1 / VectorNorm(B1,Euclidean));
Q2:=VectorScalarMultiply(B2, 1 / VectorNorm(B2,Euclidean));
Q3:=VectorScalarMultiply(B3, 1 / VectorNorm(B3,Euclidean));
Q4:=VectorScalarMultiply(B4, 1 / VectorNorm(B4,Euclidean));
Q12:=<<Q1|Q2>>;
```

$$Q1 := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ Q2 := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 \end{bmatrix},\ Q3 := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix},\ Q4 := \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Составляем матрицу Q:

Q123:=<<Q12|Q3>>;
Q:=<<Q123|Q4>>;

$$Q := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{-1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Проверить является ли матрица Q ортогональной возможно, применив команду *IsOrthogond*, указывая в скобках проверяемую матрицу. Ответ *true* означает истинность, а *false* ложность вычисления:

IsOrthogonal(Q);

$$true\ .$$

При разработке программы построения ортогональной матрицы 4-го порядка достаточно трудоемким оказался процесс ортогонализации столбцов исходной матрицы A. Этот процесс можно минимизировать, если воспользоваться командой *GrandSchmidt* $([a1, a2, \ldots, an])$, которая ортогонализирует линейно - независимую систему векторов $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots a_n$.

Для ее применения в нашем случае, матрицу A необходимо разбить на вектор– столбцы, найти базис этих вектор - столбцов и применить команду *GrandSchmidt* .Это возможно сделать для невырожденной квадратной матрицы, так как столбцы такой матрицы представляют линейную независимую систему (из теории линейной алгебры известно, что если у квадратной матрицы линейно зависимы строки (столбцы) , то определитель матрицы равен нулю):

B:=Column(A,1..4);
B1:=B[1];B2:=B[2];B3:=B[3];B4:=B[4];
B:=Basis([B1,B2,B3,B4]);

$$B := \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$B1 := \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\ B2 := \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\ B3 := \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\ B4 := \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$B := \left[\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right]$$

Применяем команду *GrandSchmidt*, для множества векторов B и получаем ортогональную систему векторов:

OS:=GramSchmidt(B);

$$OS := \left[\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{-1}{2}\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{-1}{3}\\ \frac{-1}{3}\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{-1}{4}\\ \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix}\right].$$

Множества векторов OS разбиваем на отдельные вектор- столбцы и составляем матрицу OS с ортогональными столбцами:

OS1:=OS[1];
OS2:=OS[2];
OS3:=OS[3];
OS4:=OS[4];
OS12:=<<OS1|OS2>>;
OS123:=<<OS12|OS3>>;
OS:=<<OS123|OS4>>;

$$OS := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Далее процесс нормирования столбцов совпадает с выше описываемым. Таким образом, процесс построения ортогональной матрицы с применением команды *GrandSchmidt* более удобный и не вызывает громоздких вычислений, как метод ортогонализации Грамма – Шмидта.

Как ясно видно, рациональным методом преобразований матриц является метод с использованием средств компьютерной алгебры Maple. Этот метод обладает неоспоримыми преимуществами, к числу которых относится минимальная затрата времени, эффективность решения и его автоматизация.

References:

1. Kochetkov, E.S. (2012). *Linejnaja algebra*. (p.416). Moscow: Forum.
2. Postnikov, M.M. (2009). *Linejnaja algebra*.3-Izd. (p.400). Moscow.
3. Beklimishev, D.V. (2008). *Dopolnitelnye glavy linejnoj algebry*. (p.496). SPb.: Izd. «Lan`».
4. Fadeev, D.K., & Fadeeva, V.N. (2009). *Vychislitel`nye metody linejnoj algebry*. (p.736). SPb.: Izd. «Lan`».
5. Tyrtyshnikov, E.E. (2007). *Matrichnyj analiz i linejnaja algebra*. (p.480). Moscow: Fizmatlit.
6. Prasolov, V.V. (1996). *Zadachi i teoremy linejcnoj algebry*. (p.304). Moscow: Nauka.
7. Gel`fand, I.I. (1998). *Lekcii po linejnoj algebre*.- M.Dobrosvet. MCNMO, p.320.
8. Streng, G. (1980). *Linejnaja algebra i ee primenenija*. (p.454). Moscow: Mir.
9. Gantmaher, F.R. (1966). *Teorija matric*. (p.320). Moscow: Nauka.
10. Halmosh, P. (1963). *Konechnomernye vektornye prostranstva*. (p.263). Moscow: Fizmagiz.
11. Govoruhin, V.N., & Cibulin, V.G. (1997). *Vvedenie v Maple. Matematicheskij paket dlja vseh*. (p.208). Moscow: Mir.
12. Gorbachenko, V.I. (2011). *Vychislitel`naja linejnaja algebra s primerami na MATLAB*. (p.320). SPb.:BHV.