SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science
p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)
Year: 2022 Issue: 06 Volume: 110
Published: 05.06.2022 http://T-Science.org

Issue Article

Yu.R. Krakhmaleva
M.H. Dulati Taraz Regional University
Candidate of Technical Sciences

SOLVING A 2x2 MATRIX GAME IN THE MAPLE COMPUTER ALGEBRA PACKAGE

Abstract: *An automated mathematical program for solving a 2×2 matrix game with a visual graphical solution has been developed in the Maple package. A high degree of automation of problem solving, minimal time spent, and increased efficiency of solution methods are the advantages of using a software tool.*

Key words: *Payment matrix, game price, pure strategy, mixed strategy, equilibrium situation.*
Language: *Russian*
Citation: Krakhmaleva, Yu. R. (2022). Solving a 2x2 matrix game in the Maple computer algebra package. *ISJ Theoretical & Applied Science, 06 (110),* 158-163.
Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-06-110-25 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2022.06.110.25
Scopus ASCC: *2600.*

РЕШЕНИЕ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ 2x2 В ПАКЕТЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ MAPLE

Аннотация: *Разработана в пакете Maple автоматизированная математическая программа решения матричной игры 2×2 с визуальным графическим решением. Высокая степень автоматизации решения задачи, минимальная затрата времени, повышение эффективности методов решения являются преимуществами использования программного средства.*

Ключевые слова: *Платежная матрица, цена игры, чистая стратегия, смешанная стратегия, равновесная ситуация.*

Введение

Учитывая трудоемкость и специфичность решения матричных игр известными методами, изыскиваются методы, которые отвечают современному развитию систем аналитических вычислений для эффективного решения той или иной задачи. В настоящее время бурное развитие имеет актуальное научное направление – компьютерная математика.

Программное средство в качестве системы компьютерной математики - Maple при реализации решения матричных игр представляет рациональный метод нахождения их решения. Высокая степень автоматизации решения задач, минимальная затрата времени, повышение эффективности методов решения являются преимуществами использования данного программного средства.

Пусть имеется простейшая игра, которая описывается платежной матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Максиминная стратегия первого игрока осуществляется при определении наименьших значений выигрышей в каждой строке матрицы A:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}, \quad (1)$$

при этом α называется нижняя цена игры.

Минимаксная стратегия второго игрока осуществляется при выборе наибольшие значения проигрышей для второго игрока в каждом столбце матрицы A:

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}, \quad (2)$$

β - верхняя цена игры.

При $\alpha = \beta$, общее значение является ценой игры v:

$$v = \alpha = \beta = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_j a_{ij} \quad (3).$$

В этом случае цена игры v совпадает с соответствующим элементом a^*_{ij} матрицы A, которая называется точкой равновесия или седловой точкой матрицы A. Стратегии A^* и B^*, соответствующие седловой точке, называются оптимальными, а совокупность пары оптимальных решений $\{A^*, B^*\}$ и цены игры v называется решением матричной игры с седловой точкой.

Если $\alpha < \beta$, то речь пойдет уже об игре без седловой точки. В этом случае предложенный выбор стратегий к равновесной ситуации не приводит и применяют так называемые смешанные стратегии, которые можно представить в виде случайных величин, возможными значениями которых являются чистые стратегии.

Смешанные стратегии игроков имеют вид:

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}, \; S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix},$$

где $p_i \geq 0$ – вероятность того, что первый игрок применит чистую стратегию A_i, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$;

$q_j \geq 0$ – вероятность того, что второй игрок применит чистую стратегию B_i, $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

При реализации ситуации $\{A_i, B_j\}$, вероятность составит $p_i q_j$, а выигрыш составит величину a_{ij}. Средний выигрыш первого игрока определяется, как математическое ожидание:

$$H(A, p, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j \quad (4)$$

где p, q -вектора с компонентами p_i и q_j соответственно.

Стратегии $p^0 = (p_1^0, p_2^0, ..., p_m^0)$ и $q^0 = (q_1^0, q_2^0, ..., q_m^0)$ называются оптимальными смешанными стратегиями игроков, если выполнены следующие соотношения:

$$H(A, p, q^0) \leq H(A, p^0, q^0) \leq H(A, p^0, q) \quad (5)$$

Величина

$$H(A, p^0, q^0) = v \quad (6)$$

называется ценой игры, а “набор” (p^0, q^0, v) называется решением матричной игры.

Ответ на вопрос: какие матричные игры имеют решение в смешанных стратегиях и как найти это решение, если оно существует дает основная теорема теории матричных - теорема Неймана: любая матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях.

Оптимальная смешанная стратегия p^0 первого игрока смешивается только из тех чистых стратегий A_i ($p_i \neq 0$), для которых выполнены равенства:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^0 = v.$$

А в оптимальной смешанной стратегии q^0 первого игрока смешивается только из тех чистых стратегий B_j, для которых выполнены равенства:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^0 = v.$$

Кроме того, справедливы равенства:

$$v = \min_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^0 = \max_p \min_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i = \min_q \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^0 \quad (7)$$

Равенства (7) представляют собой основу для разработки различных методов решения матричных игр.

Для решения матричной игры 2×2 оптимальные стратегии p_1^0, $p_2^0 = 1 - p_2^0$ и цена игры v должны удовлетворять условиями:

$$\begin{cases} a_{11} p_1 + a_{21} p_2 = v \\ a_{12} p_1 + a_{22} p_2 = v \end{cases} \quad (8)$$

или

$$a_{11} p_1 + a_{21}(1 - p_1) = a_{12} p_1 + a_{22}(1 - p_1)$$

Откуда получаем следующее решение матричной игры:

$$\begin{cases} p_1^0 = \dfrac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})} \\ p_2^0 = 1 - p_1^0 = \dfrac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})} \\ v = a_{11} p_1^0 + a_{21} p_2^0 = \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})} \end{cases} \qquad (9)$$

Вычислив оптимальное значение v, можно вычислить и оптимальную смешанную стратегию второго игрока из условия:

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v \text{ или}$$

$$a_{11}q_1 + a_{12}(1 - q_1) = v.$$

А именно:

$$q_1^0 = \frac{v - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}, \; q_2^0 = 1 - q_1^0 = \frac{a_{11} - v}{a_{11} - a_{12}} \qquad (10)$$

при $a_{11} \neq a_{12}$.

Реализуем посредством пакета Maple решение матричной игры с платежной матрицей :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вводим элементы платежной матрицы:

```
restart;
a11:=3;a12:=8;a21:=7;a22:=4;
A:=Matrix(2,2,[a11,a12,a21,a22]);
```

$$a11 := 3$$
$$a12 := 8$$
$$a21 := 7$$
$$a22 := 4$$
$$A := \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Для определения нижней цены игры, сначала необходимо выбрать минимальный элемент в каждой строке матрицы. Для этого составляем условное выражение для сравнения элементов строк матрицы:

```
if a11>a12 and a21>a22 then  k1:=a12;k2:=a22;fi;
if a11>a12 and a21<a22 then  k1:=a12;k2:=a21;fi;
if a11<a12 and a21<a22 then  k1:=a11;k2:=a22;fi;
if a11<a12 and a21>a22 then  k1:=a11;k2:=a22;fi;
```

$$k1 := 3$$
$$k2 := 4$$

Теперь с помощью условного выражения определим нижнюю цену игры:

```
if k1>k2 then  alfa:=k1;fi;
if k1<k2 then  alfa:=k2;fi;
```

$$alfa := 4$$

Зададим условное выражение для выбора программой максимального элемента в столбце матрицы:

```
if a11>a21 and a12>a22 then  l1:=a11;l2:=a12;fi;
if a11>a21 and a12<a22 then  l1:=a11;l2:=a22;fi;
if a11<a21 and a12<a22 then  l1:=a21;l2:=a22;fi;
if a11<a21 and a12>a22 then  l1:=a21;l2:=a12;fi;
```

$$l1 := 7$$
$$l2 := 8$$

Определим верхнюю цену игры:

```
if l1>l2 then  betta:=l2;fi;
if l1<l2 then  betta:=l1;fi;
```

$$betta := 7$$

Так как $\alpha < \beta$, то имеем игру без седловой точки, что приводит к необходимости рассмотрения смешанной стратегии:

```
if alfa<betta then print('Play_without_a_saddle_point');
else print('Balance');
fi;
```

$$Play\_without\_a\_saddle\_point$$

По формулам (9) находим смешанную стратегию первого игрока:

```
p1:=(a22-a21)/(a11+a22-(a12+a21));
p2:=(a11-a12)/(a11+a22-(a12+a21));
```

$$p1 := \frac{3}{8}$$
$$p2 := \frac{5}{8}$$

Вычислим цену игры с позиции первого игрока:

```
v1:=a11*p1+a21*p2;
v2:=(a11*a22-a12*a21)/(a11+a22-(a12+a21));
```

$$v1 := \frac{11}{2}$$
$$v2 := \frac{11}{2}$$

Независимо от того, что для определения цены игры использовали разные формулами (для большего убеждения), значение цены, как видим не изменное.

По формулам (9) определим смешанную стратегию второго игрока:

```
q1:=(v1-a12)/(a11-a12);
q2:=(a11-v1)/(a11-a12);
```

$$q1 := \frac{1}{2}$$
$$q2 := \frac{1}{2}$$

Решение получено: $p^0 = (0{,}375; 0{,}625)$, $q^0 = (0{,}5; 0{,}5)$, $v = 5{,}5$.

Полученный результат можно, как рекомендует теория игр получить графическим методом. Составим функции(выигрыши первого игрока) и затем воспользуемся командой *plot* :

```
y1:=a11*x+a21*(1-x);
y2:=a12*x+a22*(1-x);
with(plots):inequal({x>=0, x<=1, y<=a11*x+a21*(1-x), y<=a12*x+a22*(1-x)},x=0..1,y=0..10);
```

$$y1 := -4\,x + 7$$
$$y2 := 4\,x + 4$$

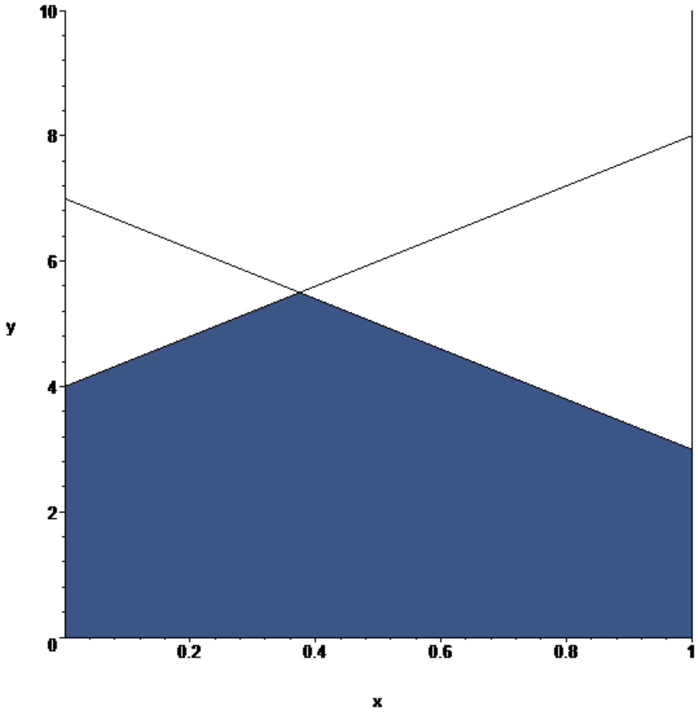

Рис. 1

Графическая иллюстрация решения матричной игры 2×2

$A=\begin{pmatrix}3 & 8\\ 7 & 4\end{pmatrix}$ в системе Maple

```
p:=(p1,p2);
q:=(q1,q2);
v:=v1;
```

Точка пересечения прямых дает решение матричной игры $\left(p_1^0, v\right)$. Запишем ответ задачи:

$$p := \frac{3}{8}, \frac{5}{8}$$
$$q := \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$
$$v := \frac{11}{2}$$

Как видно, математическая программа решения матричной игры 2×2 - автоматизированная: для ее решения на начальном этапе вводятся элементы платежной матрицы и дальнейшие вычисления производятся только с этими элементами. Решение задачи сопровождается визуальным представлением графического метода решения задачи. За счет автоматизации скорость вычисления высокая и явно прослеживается эффективность решения.

References:

1. Irodov, I.E. (2016). *Matematicheskaja teorija igr i prilozhenija*. (p.444). Spb.: Lan` KPT.
2. Sigal, A.V. (2017). *Teorija igr i ee jekonomicheskie prilozhenija*. (p.413). Moscow: Infra-M.
3. Kostevich, L.S. (2008). *Issledovanie operacij. Teorija igr*. (p.368). Minsk: Vyshejshaja shkola.
4. Konuhovskij, P.V. (2000). *Matematicheskie metody issledovanij operacij v jekonomike*. (p.208). Spb.: Izd-vo «Piter».
5. Labsker, L.G. (2001). *Igrovye metody v upravlenii jekonomikoj i biznesom*. (p.464). Moscow: Delo.
6. Ponegina, M.V. (2004). *Matematicheskie metody i modeli v jekonomike*. (p.128). Moscow: Jekzamen.
7. Shapkin, A.V. (1998). *Ot igr k igram. Matematicheskoe vvedenie.* (p.112). Moscow: Jeditorial UrSS.
8. Shikin, E.V. (2002). *Matematicheskie metody i modeli v upravlenii*. (p.440). Moscow: Delo.
9. Jashhenko, N.A. (2013). *Teorija igr v jekonomike*. (p.264). Moscow: KnoRus.
10. D`jakonov, V.P. (2006). *Maple 9.5/10 v matematike, fizike i obrazovanii*. (p.720). Moscow: SOLON-Press.
11. Govoruhin, V.N., & Cibulin, V.G. (1997). *Vvedenie v Maple. Matematicheskij paket dlja vseh.* (p.208). Moscow: Mir.