SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2022 **Issue:** 09 **Volume:** 113

Published: 22.09.2022 http://T-Science.org

Issue Article

Anvarbek Shuxratovich Ruzimov
Institute of Chemistry and Technology
Senior Lecturer of Advanced Mathematics,
Tashkent, Uzbekistan
a.sh.ruzimov@mail.ru

DYNAMIC STRESS-STRAIN STATE OF TWO-LAYER VISCOELASTIC CYLINDERS UNDER KINEMATIC EXCITATION

Abstract: *The paper considers the dynamic stress-strain state of two-layer viscoelastic cylinders under kinematic excitation. The relationship between stresses and strains satisfy the Boltzmann-Voltaire integral relation. The problem is reduced to a plane problem of the theory of viscoelasticity. The problem is solved by the Green-Lamb potential methods. The resulting integro-differential equations of partial derivatives are solved using the special Bessel and Hankel functions of the 1st and 2nd kind of the nth order. The solution is expressed in terms of special functions of the complex argument. To determine the integral constants, a system of algebraic equations with complex coefficients is obtained. Numerical solutions are obtained and an analysis is made.*

Key words: *shells, filler, viscoelastic material, dynamic load, stress-strain state.*
Language: *Russian*
Citation: Ruzimov, A. Sh. (2022). Dynamic stress-strain state of two-layer viscoelastic cylinders under kinematic excitation. *ISJ Theoretical & Applied Science, 09 (113),* 121-124.
Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-09-113-22 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2022.09.113.22
Scopus ASCC: *2200.*

ДИНАМИЧЕСКИ НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ДВУХСЛОЙНЫх ВЯЗКОУПРУГИХ ЦИЛИНДРОВ ПРИ КИНЕМАТИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Аннотация: *В работе рассматривается динамические напряженно-деформированные состояния двухслойных вязкоупругих цилиндров при кинематическом возбуждении. Связь между напряжениями и деформациями удовлетворяют интегральному соотношению Больцмана- Вольтера. Задача сводится к плоской задаче теории вязкой упругости. Поставленная задача решается методов потенциала Грин - Лэмба. Полученные интегро-дифференциальные уравнения в частных производных решаются с помощью специальных функции Бесселя и Ханкеля 1-го и 2-го рода n -го порядка. Решения выражаются через специальные функции комплексного аргумента. Для определения интегральных постоянных получена система алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами. Получены численные решения и сделан анализ.*

Ключевые слова: *оболочка, заполнитель, вязкоупругий материал, динамическая нагрузка, напряженно –деформированное состояние.*

Введение

Современные измерительные приборы и точное технологическое оборудование часто нуждаются в эффективной защите от вибраций [1,2]. Кроме того, в настоящее время существенно возросла необходимость в активной защите от вибраций научной аппаратуры на космических аппаратах, самолетах и других транспортных средствах [3,4]. Методы защиты от вибраций электронной аппаратуры (ЭА), устанавливаемой на подвижных объектах, подразделяются на пассивные, обеспечивающие ветрозащиту РЭС без дополнительных источников энергии и активные, работающие только при дополнительном внешнем источнике энергии [5,6]. Активные ветрозащитные устройства имеют значительно большую стоимость, массу, размеры и сравнительно низкую надежность. Поэтому для защиты ЭА от вибраций наиболее часто применяются пассивные методы ветрозащиты.

Целью работы является создание методики и алгоритма для проведения вычислительных экспериментов, позволяющих на ранних стадиях проектирования моделировать, обеспечить оптимальные колебания объекта (прибора) в резонансных областях спектров частот при внешних технологических и эксплуатационных воздействиях. Теоретические исследования проводились с использованием пакетов программ MAPLE – 18. Актуальность исследования, напряженного –деформированного состояния конструкций, находящихся под действием динамических нагрузок с учетом вязкоупругих свойств материала, обусловлена широким применением их в современном машиностроении [7-9]. Характерным примером таких конструкций является вязкоупругий цилиндр с центрально расположенным каналом (цилиндрическими или с нетривиальной геометрией. Корпус изготавливается из материалов, имеющих высокую удельную прочность. В зависимости от назначения ракеты, ее размеров и действующих нагрузок применяются композитные материалы.

Расчету напряженно-деформированного состояния, упругой устойчивости и динамических процессов тонкостенных оболочек и содержащегося в них упругого и вязкоупругого заполнителя посвящены работы [10-12]. Применяются аналитические и численные методы интегрирования уравнений колебаний системы. При этом из большого разнообразия форм внешнего цилиндра (оболочек), заполнителя, их механических свойств, действующих нагрузок, и т.д. выбираются параметры, характерные для твердотопливных двигателей. В данной статье рассматриваются вопросы расчета вязкоупругих оболочек, содержащих вязкоупругие массив (заполнитель). Особый интерес представляет колебания в плоскости $r\varphi$, не зависящие от продольной координаты z, которые называется плоскими изгибными колебаниями.

Постановка задачи и методы решения.

Рассматривается динамически напряженно-деформированные состояния вязкоупругого цилиндрического тела, с приложенным внешним кинематическим воздействием. Предполагается, что дано в цилиндрических координатах (r,φ,z) цилиндрическое тело с радиусом r=*a* и *b* (соответственно внутренний и внешний радиус). Связь между напряжениями и деформацией удовлетворяет следующей интегральной зависимости [8]:

$$\sigma_{ij} = \tilde{\lambda}\theta\delta_{ij} + 2\tilde{\mu}\hat{\varepsilon}_{ij},$$
$$\tilde{\lambda}\, f(t) = \lambda_0\left[f(t) - \int_0^t R_\lambda(t-\tau) f(\tau)d\tau \right], \qquad (1)$$
$$\tilde{\mu}\, f(t) = \mu_0\left[f(t) - \int_0^t R_\mu(t-\tau) f(\tau)d\tau \right].$$

Здесь $\hat{\varepsilon}_{ij}$ - компоненты тензора деформаци; θ- объёмная деформация; $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\mu}$ - операторный модуль упругости; δ_{ij} - симкол Кронекера; $f(t)$ –произвольная функция времени; $R_{Ek}(t-\tau)$ – релаксация ядра, λ_0 и μ_0 - мгновенные модули упругости. Уравнение малых колебаний цилиндра в случае плоского деформируемого состояния (радиальную u_r и тангенциальную u_φ компоненты считаем не зависимыми от осевой координаты z) имеет следующий вид [9]:

$$\tilde{\mu}\nabla^2 u_r + \tilde{\mu}/(1-2\bar{\nu})\frac{\partial\theta}{\partial r} - \tilde{\mu}\frac{u_r}{r^2} + \tilde{\mu}\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} - \rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = 0, \qquad (2)$$
$$\tilde{\mu}\nabla^2 u_\varphi + \tilde{\mu}/(1-2\bar{\nu})\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} - \tilde{\mu}\frac{u_\varphi}{r^2} + \tilde{\mu}\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} - \rho\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Здесь

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$
$$\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}.$$

На границе r=b задана внешняя гармоническая кинематическая нагрузка в виде

$$u_r(b,\varphi,t) = U_R\cos(\varphi)e^{i\nu_\omega t} \qquad (3)$$
$$u_\varphi(b,\varphi,t) = -U_R\sin(\varphi)e^{i\nu_\omega t},$$

где U_R -амплитуда перемещений внешней поверхности цилиндра, ν_ω -частота внешних нагрузок. На внутренний поверхности r=*a* ставятся условия свободные от усилий

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = 0 \qquad (4).$$

Интегродифференциальное уравнение (2) решается в потенциальных перемещениях ϕ (потенциал продолных волн) и ψ (потенциал поперечных волн), который удовлетворяет следующим интегродифференциальным уравнениям в частных производных

$$\nabla^2\phi - \int_{-\infty}^{t} R_E(t-\tau)\nabla^2\phi d\tau = \frac{1}{C_{p0}^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}, \qquad (5)$$
$$\nabla^2\bar{\psi} - \int_{-\infty}^{t} R_\mu(t-\tau)\nabla^2\bar{\psi} d\tau = \frac{1}{C_{s0}^2}\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial t^2},$$

где $\bar{\psi}_j(0,0,\psi)$ -векторная величина. Тогда связь между перемещениями цилиндра и потенцалами перемещений принимает следующий вид [10]:

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, u_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}.$$

Решение уравнение (5) ищется в виде

$$u_r(r,\varphi,t) = U_R(r)\cos(\varphi)e^{i\nu_\omega t},$$
$$u_\varphi(r,\varphi,t) = U_\varphi(r)\sin(\varphi)e^{i\nu_\omega t}, \quad (6)$$

где $U_R(r)$ и $U_\varphi(r)$ -амплитуды перемещений, которые удовлетворяют уравнению Гельмгольца комплексного коэффициента

$$\nabla^2 U_R(r) + \alpha_1^2 U_R(r) = 0,$$
$$\nabla^2 U_\varphi(r) + \beta_1^2 U_\varphi(r) = 0 \quad (7)$$

Здесь

$$\alpha_1^2 = \frac{\nu_\omega^2}{C_{p0}^2(1-\Gamma_{\lambda 01})},$$

$$\beta_1^2 = \frac{\nu_\omega^2}{C_{s0}^2(1-\Gamma_{\mu 01})}, \Gamma_{\mu 01} = 1 - a_{\mu c} - ia_{\mu s}, \Gamma_{\lambda 01} = 1 - a_{\lambda c} - ia_{\lambda s},$$

$$a_{\mu c}(\omega) = \int_0^\infty R_{\mu 1}(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau,$$
$$b_{\mu s}(\omega) = \int_0^\infty R_{\mu s}(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau,$$
$$a_{\lambda c}(\omega) = \int_0^\infty R_{\lambda 1}(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau,$$
$$b_{\lambda s}(\omega) = \int_0^\infty R_{\lambda s}(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau$$

Таким образом, совместные решения уравнений Гельмгольца (7) с учетом (4) и (6) выражаются через специальные функции Бесселя и Ханкеля [11]. Перемещение цилиндрического тела принимает следующий вид

$$u_r = \sum_{k=1}^{4} A_k U_k(r)\cos(n\varphi)e^{i\nu_\omega t} =$$
$$= \left\{\gamma_1[A_1 J_n'(\gamma_1 r) + A_2 Y_n'(\gamma_1 r)] + \frac{n}{r}[A_3 J_n(\gamma_2 r) + A_4 Y_n(\gamma_2 r)]\right\} *$$
$$* \cos(n\varphi)e^{i\nu_\omega t},$$
$$u_\varphi = \sum_{k=1}^{4} A_k V_n(r)\sin(n\varphi)e^{i\nu_\omega t} = \quad (8)$$
$$= -\frac{n}{r}\left\{\gamma_1[A_1 J_n(\gamma_1 r) + A_2 Y_n(\gamma_1 r)] + \frac{n\gamma_2}{r}[A_3 J_n'(\gamma_2 r) + A_4 Y_n'(\gamma_2 r)]\right\} *$$
$$* \sin(n\varphi)e^{i\nu_\omega t},$$

где $A_k (k = 1,2,3,4)$ - произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий (3) и (4). Тогда получим систему неоднородных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами в виде

$$\sum_{k=1}^{4} A_k c_{kj} = P\ (j = 1,2,3,4), P = \{0, 0, p_1, p_2\}^T, \quad (9)$$

где

$$c_{11} = Z_1(\gamma_1 a); c_{12} = Z_1(\gamma_1 a);$$
$$c_{13} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} Z_1(\gamma_1 a); c_{14} = Z_1(\gamma_1 a);$$
$$c_{21} = Z_2(\gamma_1 a); c_{22} = Z_2(\gamma_1 a);$$
$$c_{23} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} Z_1(\gamma_2 a); c_{24} = Z_2(\gamma_1 a / M); \quad (10)$$
$$c_{31} = J_n'(\gamma_1 b); c_{32} = Y_n'(\gamma_1 b);$$
$$c_{33} = \frac{n}{b} J_n(\gamma_2 r); c_{34} = \frac{n}{b} Y_n(\gamma_2 b);$$
$$c_{41} = \gamma_1 J_n(\gamma_1 b); c_{42} = \gamma_1 Y_n(\gamma_1 r);$$
$$c_{43} = \frac{n\gamma_2}{b} J_n'(\gamma_2 r); c_{11} = \frac{n\gamma_2}{b} Y_n'(\gamma_2 r),$$

где

$$Z_1(z) = n\left[\frac{1}{z} J_n(z) - J_n'(z)\right];$$
$$Z_2(z) = J_n'(z) + zJ_n(z)\left[1 + \frac{1}{z^2}((\lambda_0 / 2\mu_0)(\mu_{01} a))^2 - n^2\right].$$

Система алгебраических уравнений (10) решается методом Гаусса с выделениям главного элемента.

Численные результаты и их анализ.

Задача решается в безразмерных параметрах. Для расчета приняты следующие значения параметров

$\rho = 1.72 \cdot 10^{-3} кг / см^3$, $b = 0.900m, a = 0.150m, \nu = 0.25, U_R = 1$

Параметры ядра релаксации ($R(t) = Ae^{-\beta t}t^{\alpha-1}$) следующие $A = 0,048$; $\beta = 0,05$; $\alpha = 0,1$. Результаты расчетов приведены на рис.1.

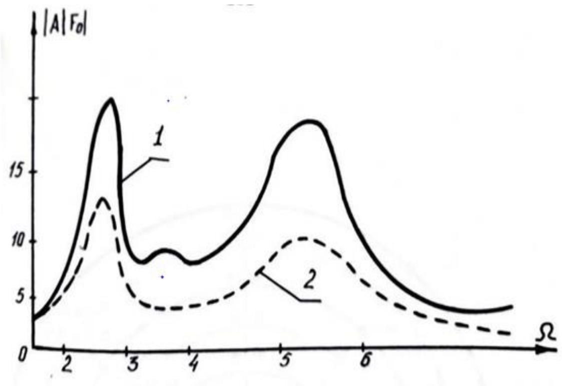

Рис. 1. Зависимости амплитуды перемещений от частоты.

На рисунке приведено изменение амплитуды перемещения в зависимости от частоты внешних нагрузок. На рисунке отмечено 1 –результаты изменения амплитуды без учёта вязкости материала, также на рисунке 2- приведено изменение амплитуды с учетом вязкости материала. Видно, что учёт вязкости материала снижает амплитуды перемещений до 17%. Найдено, что для высоких частот радиальные смешения и компоненты напряжений малы.

References:

1. Borisov, V.F. (1996). *Konstruirovaniye radioelektronnых sredstv*. (p.380). Moscow: Izd-vo MAI.
2. Teshaev, M.Kh., Safarov, I.I., & Mirsaidov, M. (2019). Oscillations of multilayer viscoelastic composite toroidal pipes. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*, Vol. 13, No. 2, 2019, pp.105-116. 10.24874/jsscm.2019.13.02.08
3. Yurkov, N. K. (2012). *Texnologiya radioelektronnyx sredstv*. (p.640). Penza: Izd-vo PenzGU.
4. Yurkov, N.K. (2004). Osobennosti upravleniya slojnymi sistemami na osnove konseptualnyx modeley. *Izmeritelnaya texnika*, № 4, pp. 14-16.
5. Kofanov, Yu.N., Malyutin, N.V., & Sarafanov, A. V. (2000). *Avtomatizatsiya proyektirovaniya i modelirovaniya pechatnyx uzlov radioelektronnoy apparatury*. (p.389). Moscow: Radio i svyaz.
6. Ilgamov, M.A., Ilgamov, M.A., Ivanov, V.A., & Gulin, B.A. (1977). *Prochnost, ustoychivost i dinamika obolochek s uprugim zapolnitelem*. (p.331). Moscow: Nauka.
7. Latifov, F.S. (1999). *Kolebaniya obolochek s uprugoy i jidkoy sredoy*. (p.164). Baku: «Elm".
8. Semenov, A.A. (2016). Model of deformation stiffened orthotropic shells under dynamic loading. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physic*, 9(4), pp.485-497.
9. Bosyakov, S.M., & Chjivey, V. (2011). Analiz svobodnyx kolebaniy silindricheskix obolochki iz stekloplastika pri granichnyx usloviyax Nave. *Mexanika mashin, mexanizmov i materialov*, №3, pp. 24-27.
10. Latifov, F.S., Seyfullaev, F.A., & Alyev, Sh. Sh. (2016). Free vibrations reinforced by transverse ribs of an anisotropic cylindrical shell made of fiberglass with a liquid flowing in it. *Applied mechanics and technical physics*, Vol. 57, No. 4, pp. 158-162.
11. Seyfullayev, A.I., & Novruzova, K. A. (2015). Oscillations of longitudinally reinforced orthotropic cylindrical shell filled with a viscous fluid. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, no. 3/7 (75), 29-33.
12. Mamedov, Dj.N. (2007). Svobodnye kolebaniya silindricheskix obolochek s zapolnitelem, usilennymi prodolnymi rebrami pri osevom sjatii s uchetom diskretnyx razmeshheniy reber. *Mexanika mashinostroyeniye,* № 4, pp.7-11.