Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500
SIS (USA) = 0.912
РИНЦ (Russia) = 3.939
ESJI (KZ) = 8.771
SJIF (Morocco) = 7.184
ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal

Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2022 **Issue:** 11 **Volume:** 115

Published: 17.11.2022 http://T-Science.org

Issue Article

K.S. Tattibekov
Dulaty university
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor
Taraz c., Republic of Kazakhstan

A MODEL RELATED TO THE SUPER-COMMUNICATION OF THE NONLINEAR SCHRODINGER EQUATION

***Abstract**: The paper investigates the σ-model associated with the superconversion of the nonlinear Schrodinger equation (OSP(2/1) - S3), which is a Z2-graded generalization of the Heisenberg ferromagnetic equation.Its various reductions and their relation to the corresponding editions of OSP(2/1)-S3 are considered.*

***Key words**: gauge equivalence, Heisenberg ferromagnet, Grassmann algebra, σ model, Schrodinger, superextension, solitons, integrals of motion, reductions, Lax pair.*

***Language**: Russian*

Citation: Tattibekov, K. S. (2022). A model related to the super-communication of the nonlinear Schrodinger equation. *ISJ Theoretical & Applied Science, 11 (115)*, 568-572.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-11-115-37 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2022.11.115.37

***Scopus ASCC**: 2610.*

МОДЕЛЬ СВЯЗАННАЯ С СУПЕРОБОБЩЕНИЕМ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

***Аннотация**: В работе исследуется σ-модель связанная с суперобобщением нелинейного уравнения Шредингера (OSP(2/1)-S3), которая является Z2 - градуированным обобщением уравнения ферромагнетика Гейзенберга. Рассматриваются ее различные редукции, их связь с соответствующими редукциями OSP(2/1)-S3.*

***Ключевые слова**: калибровочная эквивалентность, ферромагнетик Гейзенберга, алгебра Грассмана, σ модель, Шредингер, суперрасширение, солитоны, интегралы движения, редукции, пара Лакса.*

Введение

Метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) позволил интегрировать широкий класс нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, содержащих коммутирующие переменные. Вместе с тем развитие теоретической физики привело к необходимости исследования градуированных и суперсимметричных расширений солитонных уравнений [1,2]. Интерес к таким моделям вызван тем, что они содержат несколько полей-коммутирующие (бозонные) и антикоммутирующие (фермионные), взаимодействующих друг с другом, в результате исследуемые физические системы оказываются более содержательными.

Математически аппарат для исследования супермоделей основан на суперобобщений обычного классического анализа и алгебр, называемый сейчас суперматематикой [3,4]. Супераналог МОЗР для интегрируемых уравнений с антикоммутирующими переменными отмечен в ряде работ (см. например, [5]).

В этой работе исследуется σ-модель связанная с суперобобщением нелинейного уравнения Шредингера (OSP(2/1) - S3), которая является Z_2 - градуированным обобщением уравнения ферромагнетика Гейзенберга (МГ). Рассматриваются ее различные редукции, их связь с соответствующими редукциями OSP(2/1)-S3. В случае двумерной алгебры Грассмана решение супер МГ выражается через решений обычной МГ и соответствующей ей линейной задачи.

Метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) применим к уравнениям

$$U_t - V_x + [U, V] = 0, \qquad (1)$$

возникающим как условие совместности переопределенной системы линейных дифференциальных уравнений

$$\varphi_x = U(x,t,\lambda)\varphi, \quad \varphi_t = V(x,t,\lambda)\varphi, \qquad (2)$$

где $\varphi \,\epsilon\, GL(n,\mathbb{C})$, $U,V \,\epsilon\, M(n,\mathbb{C})$, $\lambda \,\epsilon\, \mathbb{C}$; $\mathbb{C}$- множество комплексных чисел, $GL(n,\mathbb{C})$ - группа невырожденных матриц размерности nxn, $M(n,\mathbb{C})$- некоторая алгебра матриц.

Условие совместности (1) при всех $\lambda \,\epsilon\, \mathbb{C}$ и в предположении, что U и V являются мероморфными функциями λ, дает систему нелинейных уравнений в частных производных на коэффициенты разложения Лорана функции U, V. Эти уравнения интегрируются с помощью МОЗР посредством системы (2). С геометрической точки зрения функции U, V можно интерпретировать как коэффициенты связности в расслоении с базой $\mathbb{R}^2$ и слоем $GL(n,\mathbb{C})$. Тогда условие (1) означает, что кривизна этой связности равна нулю.

Две системы нелинейных уравнений, интегрируемые с помощью МОЗР, называются калибровочно эквивалентными, если соответствующие плоские связности U,V и U',V' определены в одном расслоении и получается друг из друга калибровочным преобразованием, не зависящем от λ, т.е. если

$$U' = g^{-1}Vg - g^{-1}g_x, \quad V' = g^{-1}Vg - g^{-1}g_t, \qquad (3)$$

где $g(x,t) \,\epsilon\, GL(n,\mathbb{C})$. Ясно, что при этом в соответствующих системах линейных дифференциальных уравнений

$$\varphi = g \cdot \varphi'.$$

σ - модель связанная с OSP(2/1)-S3

Рассмотрим систему уравнений OSP(2/1)-S3. Она является условием совместности линейных систем (1) с матрицами

$$U = i\lambda e_0 + U_0, \quad V = 2\lambda U + V_0, \qquad (4)$$

где $U_0 = re_1 + qe_2 + \beta q_1 + \varepsilon q_2$,

$$-iV_0 = (rq + 2\beta\varepsilon)e_0 - r_x e_1 + q_x e_1 - 2\beta_x q_1 + 2\varepsilon_x q_2,$$

e_k, q_k - генераторы супергруппы $OSP(2/1)$, $\lambda \,\epsilon\, \mathbb{C}$.

Введем функцию

$$\varphi' = g^{-1}\varphi,$$

где $\varphi(x,t,\lambda)$, $g(x,t)$ матричные решения Йоста системы (1), причем

$$g(x,t) = \varphi(x,t,0),$$

т.е.

$$g_x = U_o g, \quad g_t = V_o g. \qquad (5)$$

Матричная функция $\varphi'(x,t,\lambda)$ удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_x = U'\varphi', \quad \varphi'_x = V'\varphi', \qquad (6)$$

где U', V' имеет вид (3).

Условие совместности системы (6) приведет к уравнению, калибровочно эквивалентным к OSP(2/1)-S3.

Из (3) и (4), (5) имеем,

$$U' = q^{-1}(i\lambda\, e_0 + U_0) - q^{-1}q_x = i\lambda R, \quad (7а)$$

$$V' = q^{-1}(2i\lambda^2 e_0 + 2\lambda\, U_0 + V_0) - g^{-1}g_t = 2i\lambda^2 R + 2\lambda\, g^{-1}g_x,$$

где положили

$$R = g^{-1}e_0 g. \qquad (8)$$

Выразим $g^{-1}g_x$ через введенной по формуле (8) матрицы R. Используя (5), получим

$$R_x = g^{-1}[e_0, U_0]g,$$

$$[R, R_x] = g^{-1}[e_0, [e_0, U_0]]g,$$

и

$$g^{-1}g_x = g^{-1}U_o g = \frac{1}{4}[R, R_x] + \frac{3}{4}[R^2, (R^2)_x].$$

Тогда,

$$V' = 2i\lambda^2 R + \frac{\lambda}{2}[R, R_x] + \frac{3\lambda}{2}[R^2, (R^2)_x]. \qquad (7б)$$

Условие совместности линейной системы (6) приведет к следующему уравнению

$$iR_t = \frac{1}{2}[R, R_{xx}] + \frac{3}{2}[R^2, (R^2)_{xx}]. \quad (9)$$

Таким образом, если $U_0(x,t)$ является решением системы OSP(2/1)-S3 и $g(x,t)$ - решением Йоста системы (5), то матрица $R(x,t)$ определенная по формуле (8), удовлетворяет уравнению (9), и дополнительному условию

$$R^3 = R, \qquad (10)$$

следующего из определения (8).

Определим структуру матрицы R. Так как

$$g^{st} = Hg^{-1}H^{-1},$$

то из (8) получим, что

$$R^{st} = -HRH^{-1},$$

где H - ортосимплектическая метрика супергруппы OSP(2/1). Следовательно $R \,\epsilon\, osp(2/1)$, и, стало быть, имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} S & & j_1 \\ & & j_2 \\ j_2 & -j_2 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & -S_{11} \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Тогда условие (10) равносильно условию

$$S_{11}^2 + S_{12}S_{21} + 2j_1 j_2 = 1\,. \qquad (12)$$

Система уравнений (9), с матрицей (11) и дополнительным условием (12) является Z_2 - градуированным обобщением уравнения ферромагнетика Гейзенберга [6]:

$$iS_t = \frac{1}{2}[S, S_{xx}], \qquad S^2 = I.$$

Для нее введем название OSP(2/1) - модель Гейзенберга (sMГ).

Итак, мы показали, что с помощью калибровочного преобразования, не зависящего от λ, любую плоскую связность вида (4) можно привести к форме (7).

Для доказательства того, что на этом пути получаются все плоские связности вида (7), мы покажем, что любую плоскую связность вида (7) калибровочным преобразованием можно перевести в форму (4). Тем самым будет доказано, что каждому решению уравнения (2.1) соответствует решение (9), (10) и наоборот.

Рассмотрим матрицу $R \epsilon\, osp(2/1)$ (11), удовлетворящая условию (10), и приведем ее к виду e_0 некоторым преобразованием $g\, \epsilon\, 0SP(2/1)$, т.е.

$$R = g^{-1} e_0 g.$$

Это уравнение определяет матрицу $g(x,t)$ с точностью до умножения слева на диагональную матрицу. Выбором последней можно обеспечить условие

$$g_x g^{-1} = \{e_0^2, g_x g^{-1}\} - \frac{1}{2} e_0 g_x g^{-1} e_0$$

$$- \tfrac{3}{2} e_0^2 g_x g^{-1} e_0^2, \qquad (13)$$

из которого следует, что матрица $g_x g^{-1}$ антидиагональна. Положим

$$g_x g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & r & \beta \\ q & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & -\beta & 0 \end{pmatrix} \equiv U_0,$$

где функции g, r, ε, β вводятся по матрице R. Тогда, после калибровочного преобразования, с учетом (7), получаем

$$U = g_x g^{-1} + gU' g^{-1} = g_x g^{-1} +$$

$$+ i\lambda g R g^{-1} = i\lambda e_0 + U_o. \qquad (14)$$

До сих пор мы не предполагали, что R является решением уравнения движения (9), и определили отображение

$$R(x,t) \to U_0(x,t)$$

при фиксированном t.

Предположим теперь, что $R(x,t)$ удовлетворяет уравнению OSP(2/1) - МГ (9). Тогда плоские связности U, V(пара Лакса, "U-V пара) удовлетворяет условию нулевой кривизны

$$U_t - V_x + [U, V] = 0, \qquad (15)$$

где благодаря уже известным свойствам (13) матрицы $g(x,t)$, матрицу

$$V = g_t g^{-1} + g\, V' g^{-1}$$

можно привести к виду

$$V = 2i\lambda^2 e_0 + 2\lambda U_o + g_t g^{-1}\,. \qquad (16)$$

Найдем в последнем равенстве матрицу $g_t g^{-1}$ через g, r, ε, β используя условие (15). При подстановке (14), (16) в (15) коэффициенты при λ^3, λ^2 тождественно исчезают, а исчезновение коэффициента при λ приводит к соотношению

$$[e_0, g_t g^{-1}] = -2i \frac{\partial U_0}{\partial x}\,,$$

из которого найдем

$$g_t g^{-1} = -i \begin{pmatrix} 0 & r_x & 2\beta_x \\ -q_x & 0 & -2\varepsilon_x \\ -2\varepsilon_x & -2\beta_x & 0 \end{pmatrix} + iC(x,t)e_0\,,$$

где $C(x,t)$ - вещественнозначная функция. Свободная от λ члены в диагональной части (15) приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}(C - rq - 2\beta\varepsilon) = 0\,,$$

в результате чего матрица $g_t g^{-1}$ представляется в виде

$$g_t g^{-1} = V_0 + i\alpha(t) e_0\,, \qquad (17)$$

где $V_0(x,t)$ совпадает со значением в (4), $\alpha(t)$ - вещественнозначная функция.

Далее, нетрудно проверить, что условие (13) допускает произвол в выборе матрицы $g(x,t)$ вида

$$g \to exp\{i\Theta(t) e_0\} g,$$

где

$$exp\,\{i\Theta(t)e_0\} = \begin{pmatrix} e^{i\Theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\Theta(t)$ –вещественнозначная функция.

Выбирая функцию $\Theta(t)$ из условия

$$\frac{d\Theta}{dt}(t) = \alpha(t),$$

мы можем исправить матрицу g так, что для новой g второе слагаемое в правой части (17) исчезает. В итоге получаем

$$V = 2i\lambda^2 e_o + 2\lambda\, U_0 + V_0\,. \qquad (18)$$

Условие нулевой кривизны для связностей (14), (18) есть система уравнений OSP(2/1)-S3.

Установленную калибровочную эквивалентность систем уравнений (2.1) и (9), (10) сформулируем в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. Пусть $q(x,t)$, $r(x,t)$, $\beta(x,t)$, $\varepsilon(x,t)$ -любое решение системы уравнений $OSP(2/1)-S3$, *а* $g(x,t)=\varphi(x,t,0)$, *где* $\varphi(x,t,\lambda)$ - решение системы (2.2). Тогда функция $R(x,t)=g^{-1}(x,t)e_0g(x,t)$ является решением системы OSP(2/1)-МГ (9)-(10). Обратно, пусть $R(x,t)$ - любое решение системы уравнений (9)-(10). Тогда можно единственным образом с точностью до умножения справа на постоянную диагональную матрицу построить матрицу $g(x,t)$ такую, что $R=g^{-1}e_0g$ и диагональные элементы матрицы g_xg^{-1} равны нулю. Положим $g_xg^{-1}=U_0$. Тогда элементы матрицы U_o, *т.е.* $q(x,t), r(x,t), \beta(x,t), \varepsilon(x,t)$ являются решением OSP(2/1)-S3 (2.1).

Эквивалентность "бозонных" нелинейного уравнения Шредингера и уравнения ферромагнетика Гейзенберга установлена в работе [7].

Построенная σ-модель OSP(2/1)-МГ обладает всеми замечательными свойствами, характерными для интегрируемых солитонных моделей. Она обладает бесконечным набором законов сохранения, N-солитонным решением, и может быть полностью исследована МОЗР.

Установленная связь между системами (2.1) и (9), (10) позволяет выразить плотности локальных интегралов движения OSP(2/1)-S3 в терминах R, и тем самым получить интегралы движения для OSP(2/1)-МГ. В частности,

$$rq+2\beta\varepsilon=\frac{1}{2}\,str\,U_0^2=\frac{1}{8}\,str\,\{(R_x)^2+3\,[(R^2)_x]^2\},$$

$$rq_x-r_xq+4(\beta\varepsilon_x-\beta_x\varepsilon)=-4\,str\,\{e_o[e_0,U_0]\cdot[e_0,U_{0x}]\}=str\left(\tfrac{1}{2}R_xB_x+3\,R\,\{R,B\}\cdot\{R,B_x\}\right),$$

где

$$B=[R,R_x]+\frac{3}{2}\,R^2R_xR.$$

Введем следующие сопряжения: (-) - сопряжение первого рода, (□) - сопряжение второго рода, определяемые формулами

$$\bar a\cdot\bar b=\bar b\cdot\bar a,\qquad \bar{\bar a}=a;$$
$$(a\cdot b)^{\square}=a^{\square}b^{\square},\quad (a^{\square})^{\square}=(-1)^{\alpha(a)}a,$$

где $\alpha(x)$ - функция четности.

Пусть $r=k_1\bar q$, $\beta=k_2\bar\varepsilon$. Тогда система уравнений OSP(2/1)-S3 (2.1) редуцируется к виду [8]

$$\begin{gathered} iq_t+q_{xx}-2k_1\bar q q^2-4\varepsilon\,\varepsilon_x-4k_2q\,\bar\varepsilon\,\varepsilon=0\\ i\varepsilon_t+2\varepsilon_{xx}+2k_2q\,\bar\varepsilon_x+k_2q_x\bar\varepsilon-k_1\bar q\,q\,\varepsilon=0 \end{gathered}\tag{24}$$

причем $k_1=k_2^2$, $k_i=\bar k_i$.

Эта система является UOSP(1.1/1)-S3 моделью - фермионным расширением нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) с отталкиванием. Соответсвующее решение уравнения (10) имеет вид [9]

$$R=\begin{pmatrix} S_{11} & -k_2^2\bar S_{21} & k_2\bar{\jmath}_2\\ S_{21} & -S_{11} & \jmath_2\\ \jmath_2 & -k_2\bar{\jmath}_2 & 0\end{pmatrix},$$

где $S_{11}^2-k_2^2\bar S_{21}S_{21}+2k_2\bar{\jmath}_2\jmath_2=1$, т.е. в этом случае уравнение (9) есть UOSP(1.1/1)-МГ - фермионное расширение SU (1.1)-МГ [10].

Рассмотрим редукцию: $r=k_1q^{\square}, \beta=k_2\varepsilon^{\square}$. В этом случае OSP(2/1)-S3 (2.1) редуцируется к виду (UOSP(2/1)-S3):

$$\begin{gathered} iq_t+q_{xx}-2k_1q^{\square}q^2-4\varepsilon\,\varepsilon_x-4k_2q\,\varepsilon^{\square}\varepsilon=0\,,\\ i\varepsilon_t+2\varepsilon_{xx}+2k_2q\,\varepsilon_x^{\square}+k_2q_x\varepsilon^{\square}-k_1q^{\square}q\,\varepsilon=0 \end{gathered}$$

здесь $k_1=-k_2^2$, $k_i=k_i^{\square}$. В этом случае для матрицы R имеем представление [9]:

$$R=\begin{pmatrix} S_{11} & -k_2^2S_{21}^{\square} & k_2\jmath_2^{\square}\\ S_{21} & -S_{11} & \jmath_2\\ \jmath_2 & k_2\jmath_2^{\square} & 0\end{pmatrix},\tag{25}$$

где $S_{11}^2-k_2^2S_{21}^{\square}S_{21}+2k_2\jmath_2^{\square}\jmath_2=1.$

Редукции UOSP(2/1)-S3 (24) и уравнение (9) с матрицей вида (25) являются фермионными расширениями НУШ притягательного типа и SU(2)-МГ, соответственно.

References:

1. Gursees, M., & Qquz, O. (1986). A super Soliton Connection. *Lett.Math.Phys.*, v.11, №3, pp.235-246.
2. Kulish, P.P. (1985). Quantum OSP-invariant nonlinear Schrodinger equations. *Lett. Math. Phys.*, v.10, pp.87-93.

3. Berezin, F.A. _ (1986). *Vvedenie v algebru i analiz s antikommutiruyuschimi peremennimi.* (p.208). Moscow:_Izd.MGU._
4. (1986). *Metod vtorichnogo kvantovaniya*. (p.320). Moscow: Nauka.
5. Vladimirov, B.C., & Volovich, I.V. (1984). Superanaliz 1. *Differencialnoe ischislenie*/TMF_ t.59_ №1,_pp.3-27.
6. Izergin, A.G.,_& Kulish, P.P. (1980). Obratnaya zadacha dlya sistem s antikommutiruyuschimi peremennimi i massivnaya model Tiringa. *TMF*, t.44, №2, pp.189-193.
7. Bliev, N.K.,_Mirzakulov, R., & Tattibekov, K.S. (1991). *Integriruemaya neprerivnaya OSP_ 2/1,_model Geizenberga*. Izv. AN KazSSR ser.fiz. mat., pp.23-29.
8. Tahtadjyan, L.A.,_& Faddeev, L.D. (1986). *Gamiltonov podhod v teorii solitonov*. (p.528). Moscow:_Nauka.
9. Zaharov, V.E.,_& Tahtadjyan, L.A. (1979). Ekvivalentnost nelineinogo uravneniya Shredingera i uravneniya ferromagnetika Geizenberga. *TMF*, t.38, №1, pp.26-35.
10. Kyznetsov, E.A., Ruhenchik, A.M., & Zakharov, V.E. (1986). *Phys. Rep*., v.142, №3, pp.103-165.
11. Myrzakutov, R., Pashaev, O.K., & Kholmuradov, Kh.T. (1986). Particlelike Excitations in Many Component Magnon-Phonon systems. *Phys. Scripta*, v.33, pp.378-384.