Impact Factor:

ISRA (India)	= **6.317**	**SIS** (USA)	= **0.912**	**ICV** (Poland)	= **6.630**
ISI (Dubai, UAE)	= **1.582**	**РИНЦ** (Russia)	= **3.939**	**PIF** (India)	= **1.940**
GIF (Australia)	= **0.564**	**ESJI** (KZ)	= **8.771**	**IBI** (India)	= **4.260**
JIF	= **1.500**	**SJIF** (Morocco)	= **7.184**	**OAJI** (USA)	= **0.350**

Issue Article

SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2023 **Issue:** 01 **Volume:** 117

Published: 06.01.2023 **http://T-Science.org**

Gennady Evgenievich Markelov
Bauman Moscow State Technical University
Candidate of Engineering Sciences,
associate professor, corresponding member of
International Academy of Theoretical and Applied Sciences,
Moscow, Russia
markelov@bmstu.ru

A MATHEMATICAL MODEL OF A MACRO-LEVEL OF A TECHNICAL SYSTEM

Abstract: *A working mathematical model of a macro-level of a technical system has been obtained. The technical system includes one or more thermistors, connected in parallel, with a positive temperature coefficient of resistance. The developed mathematical model has the desired properties to a sufficient extent. The use of such a mathematical model lowers costs and time spent on studies of the technical system under consideration, and allows expedient use of mathematical modelling capabilities.*

Key words: *PTC thermistor, working mathematical model, properties of mathematical models, principles of mathematical modeling.*

Language: *Russian*

Citation: Markelov, G. E. (2023). A mathematical model of a macro-level of a technical system. *ISJ Theoretical & Applied Science, 01 (117)*, 7-12.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-01-117-2 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2023.01.117.2

Scopus ASCC: *2604.*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАКРОУРОВНЯ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Аннотация: *Получена рабочая математическая модель макроуровня технической системы. Техническая система включает один или несколько параллельно соединенных терморезисторов с положительным температурным коэффициентом сопротивления. Построенная математическая модель в достаточной мере обладает свойствами полноты, адекватности, продуктивности и экономичности. Применение такой модели сокращает затраты времени и средств на проведение исследования, позволяет рационально использовать возможности математического моделирования.*

Ключевые слова: *терморезистор с положительным ТКС, рабочая математическая модель, свойства математических моделей, принципы математического моделирования.*

Введение

Рассмотрению технических характеристик терморезисторов с положительным температурным коэффициентом сопротивления (ТКС), принципов их работы и способов расчета схем с этими терморезисторами посвящена обширная учебная и научная литература. В настоящее время известны многочисленные примеры успешного практического использования терморезисторов с положительным ТКС.

Целью настоящей работы является разработка в рамках единого подхода рабочей математической модели макроуровня технической системы. Техническая система включает один или несколько параллельно соединенных терморезисторов с положительным ТКС.

Зависимость сопротивления R такого терморезистора от его температуры T не является линейной в широком диапазоне температур (см., например, [1; 2]). Однако в сравнительно узком диапазоне температур можно считать, что

$$R(T)=r\left[1+\beta\left(T-T_0\right)\right],$$

где r — сопротивление терморезистора при $T=T_0$; β — положительная постоянная величина.

Единый подход к построению рабочей математической модели, которая в достаточной мере обладает нужными свойствами применительно к конкретному исследованию, изложен в работах [3; 4]. Некоторые свойства математических моделей сформулированы, например, в [5; 6]. В работе [7] приведен пример построения математической модели, в достаточной мере обладающей нужными свойствами применительно к исследованию, некоторые результаты которого опубликованы в работах [8–10]. Особенности внедрения единого подхода к построению математических моделей рассмотрены, например, в [11; 12].

2. Постановка задачи

Рассмотрим один или несколько параллельно соединенных терморезисторов с положительным ТКС. Пусть T_i — температура i-го терморезистора, которая не зависит от пространственных координат, причем $T_i \le T^*$, $1\le i\le n$. Температура T_i в начальный момент времени t_0 равна T_0. На поверхности терморезистора площадью S_i происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой равна T_0, коэффициент теплоотдачи известен и равен α_i. Для сравнительно узкого диапазона температур от T_0 до T^* считаем, что

$$R_i\left(T_i\right)=r_i\left[1+\beta_i\left(T_i-T_0\right)\right],$$

$$C_i\left(T_i\right)=c_i\left[1+\gamma_i\left(T_i-T_0\right)\right],$$

где $R_i\left(T_i\right)$ и $C_i\left(T_i\right)$ — сопротивление и полная теплоемкость i-го терморезистора; r_i и c_i — сопротивление и полная теплоемкость i-го терморезистора при $T_i=T_0$; β_i и γ_i — положительные постоянные величины. Через i-й терморезистор протекает электрический ток, сила которого равна

$$I_i=\frac{U}{r_i\left[1+\beta_i\left(T_i-T_0\right)\right]}, \tag{1}$$

где U — постоянная разность электрических потенциалов на полюсах i-го элемента.

Пусть в рамках проводимого исследования представляет интерес величина

$$I=\sum_{i=1}^{n} I_i. \tag{2}$$

Построим рабочую математическую модель макроуровня объекта исследования, которая в достаточной мере обладает свойствами полноты, адекватности, продуктивности и экономичности.

3. Решение задачи при *n* = 1

Пусть техническая система включает только один терморезистор с положительным ТКС, т. е. $n=1$. Тогда для решения поставленной задачи выстроим иерархию математических моделей макроуровня данного объекта исследования и определим условия, при выполнении которых можно с относительной погрешностью не более заданного значения δ_0 найти искомую величину I_1.

Если разность T_1-T_0 достаточно мала, то согласно (1) найдем искомую величину по формуле

$$I_0=\frac{U}{r_1}. \tag{3}$$

Определим условия, при которых применима полученная формула. Для этого рассмотрим установившийся процесс теплообмена. В этом случае мощность тепловыделения в материале терморезистора равна тепловому потоку, отводимому от терморезистора, т. е.

$$\frac{U^2}{R_1\left(T_*\right)}=\alpha_1\left(T_*-T_0\right)S_1,$$

где T_* — установившееся значение температуры терморезистора. Из полученного равенства легко найти

$$T_*=T_0+\frac{1}{2\beta_1}\left(-1+\sqrt{1+\frac{4\beta_1U^2}{\alpha_1S_1r_1}}\right),$$

а затем определить установившееся значение искомой величины

$$I_*=\frac{2U}{r_1\left[1+\sqrt{1+4\beta_1U^2\alpha_1^{-1}S_1^{-1}r_1^{-1}}\right]}, \tag{4}$$

причем для данного диапазона температур

$$\frac{U^2}{\alpha_1S_1r_1\left(T^*-T_0\right)}\le 1+\beta_1\left(T^*-T_0\right). \tag{5}$$

Для относительной погрешности величины I_0 запишем

$$\delta\left(I_0\right)=\left|\frac{I_1-I_0}{I_1}\right|=\frac{I_0}{I_1}-1\le\frac{I_0}{I_*}-1.$$

При выполнении неравенства

$$\frac{I_0}{I_*}-1\le\delta_0$$

можно с относительной погрешностью не более

Impact Factor:

ISRA (India)	= 6.317	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
ISI (Dubai, UAE)	= 1.582	РИНЦ (Russia)	= 3.939	PIF (India)	= 1.940
GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.771	IBI (India)	= 4.260
JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 7.184	OAJI (USA)	= 0.350

δ_0 использовать формулу (3) для нахождения искомой величины. Следовательно, при выполнении неравенства

$$I_0 \le (1+\delta_0) I_* \qquad (6)$$

математическая модель макроуровня (3) в достаточной мере обладает свойствами полноты, адекватности, продуктивности и экономичности.

Затем определим условия, при которых применима математическая модель (4). Для этого рассмотрим неустановившийся процесс теплообмена. В этом случае изменение температуры терморезистора во времени t описывает обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$C_1(T_1)\frac{dT_1}{dt} = \frac{U^2}{R_1(T_1)} - \alpha_1(T_1 - T_0)S_1,$$

а начальное условие имеет вид

$$T_1(t_0) = T_0.$$

Учитывая, что

$$I_1 = \frac{I_0}{1+\beta_1(T_1 - T_0)},$$

сформулируем задачу Коши

$$\frac{c_1 U}{\beta_1 r_1 I_1^2}\frac{dI_1}{dt} = \frac{\alpha_1 S_1 U - \alpha_1 S_1 r_1 I_1 - \beta_1 r_1 U I_1^2}{\gamma_1 U - \gamma_1 r_1 I_1 + \beta_1 r_1 I_1},$$

$$I_1(t_0) = U r_1^{-1}. \qquad (7)$$

Тогда найдем момент времени

$$t_1 = t_0 + \frac{c_1}{\alpha_1 S_1}\left[\frac{\gamma_1}{\beta_1}\left(\frac{r_1 I_*}{U} - 1 + \delta_0\right)\frac{U}{r_1 I_*} + \left(\frac{U}{2U - r_1 I_*} + \frac{\gamma_1}{\beta_1}\frac{U - r_1 I_*}{2U - r_1 I_*}\frac{U}{r_1 I_*} - 1\right) \times \ln\left(2 - \frac{r_1 I_*}{U} - \delta_0\right) - \left(\frac{U}{2U - r_1 I_*} + \frac{\gamma_1}{\beta_1}\frac{U - r_1 I_*}{2U - r_1 I_*}\frac{U}{r_1 I_*}\right)\ln\left(\frac{U}{U - r_1 I_*}\delta_0\right)\right],$$

для которого

$$I_1(t_1) = \frac{I_*}{1-\delta_0}.$$

Очевидно, что при $t \ge t_1$

$$\delta(I_*) = \left|\frac{I_1 - I_*}{I_1}\right| = 1 - \frac{I_*}{I_1} \le \delta_0,$$

а значение I_* можно с относительной погрешностью не более δ_0 считать равным $I_1(t)$. Следовательно, можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (4) для нахождения искомой величины. Это позволяет сформулировать следующее утверждение об использовании математической модели (4).

Утверждение 1. Если не выполнено условие (6), то математическая модель макроуровня (4) при $t \ge t_1$ в достаточной мере обладает свойствами полноты, адекватности, продуктивности и экономичности.

Разработка новой математической модели при формировании иерархии математических моделей объекта исследования может привести к уточнению найденных ранее условий применимости построенных математических моделей. Действительно, используя математическую модель (7), можно уточнить условие применимости формулы (3). Для этого найдем момент времени

$$t_1^* = t_0 + \frac{c_1}{\alpha_1 S_1}\left[\left(\frac{\gamma_1}{\beta_1}\frac{U - r_1 I_*}{2U - r_1 I_*}\frac{U}{r_1 I_*} + \frac{U}{2U - r_1 I_*} - 1\right)\ln\left(1 + \frac{r_1 I_*}{U}\delta_0\right) - \left(\frac{U}{2U - r_1 I_*} + \frac{\gamma_1}{\beta_1}\frac{U - r_1 I_*}{2U - r_1 I_*}\frac{U}{r_1 I_*}\right) \times \ln\left(1 - \frac{r_1 I_*}{U - r_1 I_*}\delta_0\right) - \frac{\gamma_1}{\beta_1}\delta_0\right],$$

для которого

$$I_1(t_1^*) = \frac{I_0}{1+\delta_0}.$$

Очевидно, что при $t \le t_1^*$

$$\delta(I_0) = \left|\frac{I_1 - I_0}{I_1}\right| = \frac{I_0}{I_1} - 1 \le \delta_0,$$

а значение I_0 можно с относительной погрешностью не более δ_0 считать равным $I_1(t)$. Следовательно, можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (3) для нахождения искомой величины. Это позволяет сформулировать утверждение об использовании математической модели (3).

Утверждение 2. Если выполнено условие (6) или $t \le t_1^*$, то математическая модель макроуровня (3) в достаточной мере обладает свойствами полноты, адекватности, продуктивности и экономичности.

Тогда применительно к построенной иерархии математических моделей данного объекта исследования справедливо следующее утверждение об использовании математической модели (7).

Утверждение 3. Если не выполнено условие (6), то математическая модель макроуровня (7) при $t_1^* < t < t_1$ в достаточной мере обладает свойствами полноты, адекватности, продуктивности и экономичности.

4. Решение задачи при $n \geq 1$

Пусть техническая система включает один или несколько параллельно соединенных терморезисторов с положительным ТКС. Для решения поставленной задачи используем полученные результаты при $n=1$. Они позволяют легко построить иерархию математических моделей макроуровня объекта исследования и определить условия, при выполнении которых можно с относительной погрешностью не более заданного значения δ_0 найти искомую величину I.

Если разности

$$T_1 - T_0, \ldots, T_n - T_0$$

достаточно малы, то согласно (1) найдем искомую величину по формуле

$$I_0 = U\sum_{i=1}^{n} r_i^{-1}. \qquad (8)$$

Определим условия, при которых применима полученная формула. Для этого рассмотрим установившийся процесс теплообмена. В этом случае согласно (4) и (5) установившееся значение величины I_i найдем по формуле

$$I_i^* = \frac{2U}{r_i\left[1+\sqrt{1+4\beta_i U^2\alpha_i^{-1}S_i^{-1}r_i^{-1}}\right]},$$

причем для данного диапазона температур

$$\frac{U^2}{\alpha_i S_i r_i\left(T^* - T_0\right)} \leq 1+\beta_i\left(T^* - T_0\right). \qquad (9)$$

Тогда установившееся значение искомой величины равно

$$I_* = \sum_{i=1}^{n} I_i^*. \qquad (10)$$

Для относительной погрешности величины I_0 запишем

$$\delta(I_0) = \left|\frac{I - I_0}{I}\right| = \frac{I_0}{I} - 1 \leq \frac{I_0}{I_*} - 1.$$

При выполнении неравенства

$$\frac{I_0}{I_*} - 1 \leq \delta_0$$

можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (8) для нахождения искомой величины. Следовательно, при выполнении неравенства

$$I_0 \leq (1+\delta_0) I_* \qquad (11)$$

математическая модель макроуровня (8) в достаточной мере обладает свойствами полноты, адекватности, продуктивности и экономичности.

Затем определим условия, при которых применима математическая модель (10). Для этого рассмотрим неустановившийся процесс теплообмена. Тогда согласно (7) приходим к задаче Коши

$$\frac{c_i U}{\beta_i r_i I_i^2}\frac{dI_i}{dt} = \frac{\alpha_i S_i U - \alpha_i S_i r_i I_i - \beta_i r_i U I_i^2}{\gamma_i U - \gamma_i r_i I_i + \beta_i r_i I_i},$$

$$I_i(t_0) = U r_i^{-1}, \qquad (12)$$

где $1 \leq i \leq n$, и найдем момент времени

$$t_i = t_0 + \frac{c_i}{\alpha_i S_i}\left[\frac{\gamma_i}{\beta_i}\left(\frac{r_i I_i^*}{U} - 1 + \delta_0\right)\frac{U}{r_i I_i^*} + \left(\frac{U}{2U - r_i I_i^*} + \frac{\gamma_i}{\beta_i}\frac{U - r_i I_i^*}{2U - r_i I_i^*}\frac{U}{r_i I_i^*} - 1\right)\times \ln\left(2 - \frac{r_i I_i^*}{U} - \delta_0\right) - \left(\frac{U}{2U - r_i I_i^*} + \frac{\gamma_i}{\beta_i}\frac{U - r_i I_i^*}{2U - r_i I_i^*}\frac{U}{r_i I_i^*}\right)\ln\left(\frac{U}{U - r_i I_i^*}\delta_0\right)\right],$$

для которого

$$I_i(t_i) = \frac{I_i^*}{1-\delta_0}.$$

Очевидно, что при $t \geq t_i$

$$\delta(I_i^*) = \left|\frac{I_i - I_i^*}{I_i}\right| = 1 - \frac{I_i^*}{I_i} \leq \delta_0,$$

а значение I_i^* можно с относительной погрешностью не более δ_0 считать равным $I_i(t)$. Пусть $t_* = \max_{1\leq i\leq n} t_i$, тогда легко показать, что при $t \geq t_*$

$$\delta(I_*) = \left|\frac{I - I_*}{I}\right| = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(I_i - I_i^*\right)}{\sum_{i=1}^{n} I_i} \leq \delta_0.$$

Следовательно, можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (10) для нахождения искомой величины. Это позволяет сформулировать следующее утверждение об использовании математической модели (10).

Утверждение 4. Если не выполнено условие (11), то математическая модель макроуровня (10) при $t \geq t_*$ в достаточной мере обладает свойствами полноты, адекватности, продуктивности и экономичности.

Уточним условие применимости формулы (8), используя математическую модель (2), (12). Для этого найдем момент времени

$$t_i^* = t_0 + \frac{c_i}{\alpha_i S_i}\left[\left(\frac{\gamma_i}{\beta_i}\frac{U - r_i I_i^*}{2U - r_i I_i^*}\frac{U}{r_i I_i^*} + \frac{U}{2U - r_i I_i^*} - 1\right)\ln\left(1 + \frac{r_i I_i^*}{U}\delta_0\right) - \left(\frac{U}{2U - r_i I_i^*} + \frac{\gamma_i}{\beta_i}\frac{U - r_i I_i^*}{2U - r_i I_i^*}\frac{U}{r_i I_i^*}\right)\times\right.$$

$$\times \ln\left(1-\frac{r_i I_i^*}{U-r_i I_i^*}\delta_0\right)-\frac{\gamma_i}{\beta_i}\delta_0\Bigg],$$

для которого

$$I_i\left(t_i^*\right)=\frac{U}{r_i\left(1+\delta_0\right)}.$$

Очевидно, что при $t \le t_i^*$

$$\delta\left(Ur_i^{-1}\right)=\left|\frac{I_i-Ur_i^{-1}}{I_i}\right|=\frac{U}{r_i I_i}-1\le\delta_0,$$

а значение Ur_i^{-1} можно с относительной погрешностью не более δ_0 считать равным $I_i\left(t\right)$.

Пусть $t^*=\min\limits_{1\le i\le n} t_i^*$, тогда легко показать, что при $t \le t^*$

$$\delta\left(I_0\right)=\left|\frac{I-I_0}{I}\right|=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(Ur_i^{-1}-I_i\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} I_i}\le\delta_0.$$

Следовательно, можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (8) для нахождения искомой величины. Это позволяет сформулировать утверждение об использовании математической модели (8).

Утверждение 5. Если выполнено условие (11) или $t \le t^*$, то математическая модель макроуровня (8) в достаточной мере обладает свойствами полноты, адекватности, продуктивности и экономичности.

Тогда применительно к построенной иерархии математических моделей данного объекта исследования справедливо следующее утверждение об использовании математической модели (2), (12).

Утверждение 6. Если не выполнено условие (11), то математическая модель макроуровня (2), (12) при $t^* < t < t_*$ в достаточной мере обладает свойствами полноты, адекватности, продуктивности и экономичности.

5. Результаты

Построение иерархии математических моделей макроуровня объекта исследования при выполнении неравенства (9) позволяет выявить рабочую математическую модель, которая в достаточной мере обладает нужными свойствами применительно к конкретному исследованию.

Действительно, если выполнено условие (11) или в рамках проводимого исследования $t \le t^*$, то математическую модель макроуровня (8) рассматриваем как рабочую математическую модель. Если не выполнено условие (11), то математическую модель макроуровня (10) при $t \ge t_*$ выбираем как рабочую. В противном случае рабочей математической моделью считаем математическую модель макроуровня (2), (12).

6. Заключение

Таким образом, в рамках единого подхода сформулированы применительно к данному исследованию утверждения. Они позволяют установить рабочую математическую модель макроуровня рассматриваемой технической системы. Построенная математическая модель в достаточной мере обладает свойствами полноты, адекватности, продуктивности и экономичности.

Очевидно, что применение такой математической модели не только сокращает затраты времени и средств на проведение исследования, но и позволяет рационально использовать возможности математического моделирования.

References:

1. Macklen, E. D. (1979). *Thermistors*. Ayr: Electrochemical Publications Ltd.
2. Sze, S. M., Li, Y., & Ng, K. K. (2021). *Physics of Semiconductor Devices*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.
3. Markelov, G. E. (2015). On Approach to Constructing a Working Mathematical Model. *ISJ Theoretical & Applied Science, 04 (24)*, 287–290. Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS*04(24)52 Doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.04.24.52
4. Markelov, G. E. (2015). Constructing a Working Mathematical Model. *ISJ Theoretical & Applied Science, 08 (28)*, 44–46. Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-08-28-6 Doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.08.28.6
5. Myshkis, A. D. (2011). *Elements of the Theory of Mathematical Models* [in Russian]. Moscow: URSS.
6. Zarubin, V. S. (2010). *Mathematical Modeling in Engineering* [in Russian]. Moscow: Izd-vo MGTU im. N. E. Baumana.
7. Markelov, G. E. (2012). Peculiarities of Construction of Mathematical Models. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii, No. 4,*

http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/150.html

8. Markelov, G. E. (2000). Effect of initial heating of the jet-forming layer of shaped-charge liners on the ultimate elongation of jet elements. *J. Appl. Mech. and Tech. Phys., 41, No. 2,* 231–234.
9. Markelov, G. E. (2000). Effect of initial heating of shaped charge liners on shaped charge penetration. *J. Appl. Mech. and Tech. Phys., 41*, *No. 5*, 788–791.
10. Markelov, G. E. (2000). *Influence of heating temperature on the ultimate elongation of shaped-charge jet elements*. Proc. of the 5th Int. Conf. “Lavrentyev Readings on Mathematics, Mechanics and Physics”. (p. 170). Novosibirsk: Lavrentyev Institute of Hydrodynamics.
11. Markelov, G. E. (2015). Particular Aspects of Teaching the Fundamentals of Mathematical Modeling. *ISJ Theoretical & Applied Science, 05 (25)*, 69–72.
    Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS*05(25)14 Doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.05.25.14
12. Markelov, G. E. (2016). Teaching the Basics of Mathematical Modeling. Part 2. *ISJ Theoretical & Applied Science, 01 (33)*, 72–74.
    Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-01-33-15 Doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2016.01.33.15