

## Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317  
ISI (Dubai, UAE) = 1.582  
GIF (Australia) = 0.564  
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
ПИИИ (Russia) = 3.939  
ESJI (KZ) = 8.771  
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630  
PIF (India) = 1.940  
IBI (India) = 4.260  
OAJI (USA) = 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

### International Scientific Journal Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2023 Issue: 01 Volume: 117

Published: 30.01.2023 <http://T-Science.org>

Issue

Article



**Olimjon Samadovich Akhmedov**

Bukhara State University

Lecturer, Department of Mathematics analysis,

Faculty of Physics and Mathematics,

Bukhara, Uzbekistan.

[o.s.axmedov@buxdu.uz](mailto:o.s.axmedov@buxdu.uz), [axmedov.olimjon70@gmail.com](mailto:axmedov.olimjon70@gmail.com)

## INVESTIGATION OF THE OSCILLATION OF AN ELASTIC ROD IN TIME TAKING INTO ACCOUNT THE RELAXATION PROPERTIES OF MATERIALS

**Abstract:** In the present work, a mathematical model of oscillations of an elastic rod under the action of an external harmonic load is developed, taking into account the relaxation properties of the material and the resistance forces exerted by the rod to the process of changing its shape. The differential equation of the model was obtained taking into account the time dependence of stresses and strains in the formula of Hooke's law, reduced to the form of complicated Maxwell and Kelvin-Voigt models. The results of studying the model by the numerical method allow us to conclude that when the frequency of natural oscillations of the rod coincides with the frequency of oscillations of the external load, a resonance is observed, accompanied by an unlimited increase in the oscillation amplitude (in the absence of medium resistance).

**Key words:** elastic deformation, rod oscillations, relaxation coefficient, drag coefficient, resonant vibrations.

**Language:** Russian

**Citation:** Akhmedov, O. S. (2023). Investigation of the oscillation of an elastic rod in time taking into account the relaxation properties of materials. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 01 (117), 672-677.

**Soi:** <http://s-o-i.org/1.1/TAS-01-117-57> **Doi:**  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2023.01.117.57>

**Scopus ASCC:** 2211.

### ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ ВО ВРЕМЕНИ С УЧЁТОМ РЕЛАКСАЦИОННЫХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ

**Аннотация:** В настоящей работе разработана математическая модель колебаний упругого стержня под действием внешней гармонической нагрузки с учётом релаксационных свойств материала и сил сопротивления, оказываемого стержнем процессу изменения его формы. Дифференциальное уравнение модели получено с учётом зависимости от времени напряжений и деформаций в формуле закона Гука, сведённой к виду усложнённых моделей Максвелла и Кельвина – Фойгта. Результаты исследований модели численным методом позволяют заключить, что при совпадении частоты собственных колебаний стержня с частотой колебаний внешней нагрузки наблюдается резонанс, сопровождающийся неограниченным возрастанием амплитуды колебаний (при отсутствии сопротивления среды).

**Ключевые слова:** упругая деформация, колебания стержня, коэффициент релаксации, коэффициент сопротивления, резонансные колебания.

#### Введение

Вызванная некоторым возмущением упругая деформация твёрдого тела распространяется с зависящей от свойств среды скоростью. При этом волновой процесс колебания среды не сопровождается перемещением вещества.

Уравнения, описывающие эти процессы, относятся к гиперболическому типу [1]. Применительно к техническим устройствам довольно часто встречается случай, когда процесс собственных колебаний, инициированный некоторым начальным смещением,

## Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317  
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582  
 GIF (Australia) = 0.564  
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
 ПИИЦ (Russia) = 3.939  
 ESJI (KZ) = 8.771  
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630  
 PIF (India) = 1.940  
 IBI (India) = 4.260  
 OAJI (USA) = 0.350

сопровождается приложенной на свободном конце стержня нагрузкой, действующей по определённому закону [2]. Особый интерес представляет нахождение резонансных возрастных амплитуды колебаний, когда частота собственных колебаний совпадает с частотой колебаний приложенной к стержню нагрузки [3].

### Постановка задачи и методика решения

В основе вывода дифференциального уравнения колебаний стержня, лежит закон Гука

$$\sigma = E \partial U / \partial x, \quad (1)$$

и второй закон Ньютона, выполненный в форме уравнения движения

$$\partial \sigma / \partial x = \rho \partial^2 U / \partial t^2, \quad (2)$$

где  $\sigma$  – нормальное напряжение,  $H/M^2$ ;  $U$  – перемещение,  $m$ ;  $x$ -координата,  $m$ ;  $t$  – время,  $s$ ;  $\rho$  – плотность,  $kg / m^3$ ;  $E$  – модуль нормальной упругости (модуль Юнга),  $Pa$ ;  $\varepsilon = \partial U / \partial x$  – деформация,  $m$ .

Подставляя (1) в (2), находим [4]

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = e^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}, \quad (3)$$

где  $e = \sqrt{E/\rho}$  – скорость распространения продольного возмущения,  $m/s$ .

Уравнение (3) является волновым гиперболическим уравнением, описывающим незатухающие колебания упругих тел. Отсутствие затухания объясняется тем, что в данном уравнении отсутствует слагаемое, учитывающее внутреннее сопротивление, которое оказывает среда при воздействии на неё механической нагрузки, вызывающей упругие перемещения. Для учёта сопротивления среды примем, что сила сопротивления  $F_c$  пропорциональна скорости перемещения во времени

$$F_c = -r \partial U / \partial t, \quad (4)$$

где  $r$  – коэффициент сопротивления,  $kg/c$ , знак минус в формуле (4) означает, что сила сопротивления имеет направление, противоположное скорости перемещения. Подставляя (4) в уравнение второго закона Ньютона, находим

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2 U}{dt^2} = \rho S \Delta x \frac{d^2 U}{dt^2}, \quad (5)$$

с учётом того, что сила сопротивления  $F_c$  относится к объёмным силам, находим

$$\rho \frac{d^2 U}{dt^2} = \frac{d\sigma}{dx} - \frac{r}{V} \frac{dU}{dt}, \quad (6)$$

где  $F$  – сила, действующая на тело,  $kg \cdot m/c^2$ ;  $m$  – масса тела,  $kg$ ;  $a = dv/dt$  – ускорение,  $m/c^2$ ;  $v = dU/dt$  – скорость,  $m/c$ ;  $S$  – площадь поперечного сечения тела,  $m^2$ ;  $\Delta x$  – длина элементарного участка,  $m$ ;  $V$  – объём,  $m^3$ .

Подставляя (1) в (6), находим волновое уравнение, описывающее затухающие колебания [5]

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = e^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (7)$$

где  $\gamma = r / (\rho V)$  – коэффициент сопротивления, имеющий размерность  $1/c$ . При выводе уравнения (6) использован закон Гука, в котором, как известно, отсутствует причинно – следственная связь явлений. Причиной (действующей силой) здесь является деформация  $\varepsilon = \partial U / \partial x$ , а следствием – напряжение  $\sigma$ . Отсутствие в формуле закона Гука временной переменной свидетельствует о том, что причина и следствие в данном случае не разделены во времени и, поэтому следствие с изменением причины наступает мгновенно (скачкообразно). Однако скорости распространения потенциалов любых физических полей не могут принимать бесконечных значений. В реальном теле процесс их изменения происходит с некоторым запаздыванием во времени согласно релаксационным свойствам материала, учитываемым коэффициентами релаксации.

Для учёта релаксационных свойств материала формулу (1) закона Гука представим в виде линейной комбинации производных напряжения и деформации по времени в произведении с соответствующими коэффициентами релаксации  $\tau_1$  и  $\tau_2$

$$\sigma + \tau_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \tau_1^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + \dots = E \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \tau_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \tau_2^2 \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial t^2} + \dots \right), \quad (8)$$

где  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  – коэффициенты релаксации напряжения и деформации,  $s$ .

Ограничиваясь двумя первыми членами в правой и левой части, соотношение (8) приводится к виду

$$\sigma = E \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \tau_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \right) - \tau_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (9)$$

Соотношение (9) полностью совпадает со стандартными моделями вязкоупругого тела, известными как модели Максвелла, Кельвина – Фойгта и реального тела [6]. Отметим, что соотношение (9) соответствует усложненной модели Максвелла и Кельвина – Фойгта, в которой добавляется третий элемент – пружина, расположенная параллельно к последовательно соединённым телам Гука и Ньютона (в модели Максвелла) и демпфер (расположенный параллельно к последовательно соединённым телам Гука и Ньютона) в модели Кельвина – Фойгта [7].

Модели Максвелла и Кельвина – Фойгта отличаются лишь различными формулами для коэффициентов релаксации  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Физический смысл этих моделей в том, что в них учитывается временная зависимость напряжений и деформаций и их взаимное влияние друг на друга. Совпадение модели (9) с моделями Максвелла, Кельвина – Фойгта и реального тела (с точностью до постоянных) свидетельствует [8] об использовании одинаковых исходных принципов.

## Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317  
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582  
 GIF (Australia) = 0.564  
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
 ПИИЦ (Russia) = 3.939  
 ESJI (KZ) = 8.771  
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630  
 PIF (India) = 1.940  
 IBI (India) = 4.260  
 OAJI (USA) = 0.350

Для вывода дифференциального уравнения, в котором учитывается изменение во времени напряжений и деформаций в формуле закона Гука, подставим (9) в уравнение движения (6)

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + E \tau_2 \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} - \tau_1 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) - \frac{r}{V} \frac{\partial U}{\partial t}$$

Заменяя в последнем соотношении величину  $\partial \sigma / \partial x$  ее значением из (2), получаем

$$\tau_1 \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = e^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + e^2 \tau_2 \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} - \gamma \frac{\partial U}{\partial t} \quad (10)$$

Очевидно, что при  $\tau_1 = \tau_2 = \gamma = 0$  уравнение (10) приводится к уравнению незатухающих колебаний (3).

Найдем решение краевой задачи о колебаниях стержня, один торец которого жестко закреплен, а на втором на единицу площади приложена сила  $F$ , изменяющуюся по косинусоидальному закону.

$$\frac{F}{ES} = \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = \cos(\omega t) \quad (11)$$

где  $S$  – площадь сечения стержня;  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $l/c$  – круговая частота.

В начальный момент времени стержень деформирован по линейному закону, согласно которому максимальное перемещение имеет свободный торец стержня. Математическая постановка задачи в данном случае имеет вид

$$\tau_1 \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = e^2 \left[ \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + \tau_2 \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right] - \gamma \frac{\partial U(x,t)}{\partial t}; \quad (12)$$

$$(t > 0, 0 < x < \delta)$$

$$U(x,0) = b(\delta - x); \quad (13)$$

$$\partial U(x,0) / \partial t = D(\delta - x); \quad (14)$$

$$\partial^2 U(x,0) / \partial t^2 = 0; \quad (15)$$

$$\partial U(0,t) / \partial x = \cos(\omega t); \quad (16)$$

$$U(\delta,t) = 0, \quad (17)$$

где  $\delta$  – длина стержня,  $m$ ;  $b$  – коэффициент, учитывающий начальное перемещение стержня;  $D$  – коэффициент, определяющий интенсивность изменения перемещения во времени при  $t = 0$ ,  $c^{-1}$ .

Из начального условия (13) следует, что при  $t = 0$  перемещение стержня линейно зависит от координаты  $x$ , принимая максимальное значение  $U(0;0) = U_0 = b\delta$  в точке  $x = 0$  и минимальное  $U(\delta,0) = 0$ , – в точке  $x = \delta$ . Введем следующие безразмерные переменные и параметры

$$\Theta = \frac{U}{U_0}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad F_0 = \frac{e\tau_2}{\delta}; \quad F_1 = \frac{e\tau_1}{\delta};$$

$$F_2 = \frac{e\tau_2}{\delta}; \quad F_3 = \frac{\delta\gamma}{e}; \quad B = \frac{D\delta^2}{eU_0}, \quad (18)$$

где  $\Theta$  – безразмерное перемещение;  $\xi$  – безразмерная координата;  $F_0$  – число Фурье (безразмерное время);  $U_0 = b\delta$ ;  $F_1, F_2$  – безразмерные коэффициенты релаксации;  $F_3$  – безразмерный коэффициент сопротивления среды;  $D$  – безразмерный коэффициент.

С учётом (18) задача (12) – (17) принимает вид

$$F_3 \frac{\partial^3 \Theta(\xi, F_0)}{\partial F_0^3} + F_1 \frac{\partial^3 \Theta(\xi, F_0)}{\partial F_0^2} + \frac{\partial^2 \Theta(\xi, F_0)}{\partial F_0^2} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, F_0)}{\partial \xi^2} + F_2 \frac{\partial^3 \Theta(\xi, F_0)}{\partial \xi^2 \partial F_0}; \quad (19)$$

$$(F_0 > 0; 0 < \xi < 1)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1 - \xi; \quad (20)$$

$$\frac{\partial \Theta(\xi, 0)}{\partial F_0} = B(1 - \xi); \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta(\xi, 0)}{\partial F_0^2} = 0; \quad (22)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, F_0)}{\partial \xi} = F_4 \cos(F_5 F_0); \quad (23)$$

$$\Theta(1, F_0) = 0, \quad (24)$$

где  $F_4 = \delta / U_0$ ;  $F_5 = \omega \delta / e$ ;  $B$  – безразмерный коэффициент.

Для решения задачи (19) – (24) конечно – разностным методом в рассматриваемой области вводится пространственная сетка с шагами

$$\Delta \xi = 0,005, \quad \Delta F_0 = 0,005 \text{ соответственно по}$$

$$\text{переменным } \xi \text{ и } F_0 \text{ так, что}$$

$$\xi_k = k \Delta \xi, \quad k = \overline{0, K}; \quad F_{0i} = i \Delta F_0, \quad i = \overline{0, I}, \quad (25)$$

где  $K = 200$ ,  $I = 50000$  – число шагов по координатам  $\xi$ ,  $F_0$ .

На сетке (25) вводятся сеточные функции  $\Theta_k^i = \Theta(\xi_k, F_{0i})$ . Используя принятую схему аппроксимации дифференциальных операторов, задача (19) – (24) записывается в виде

$$F_3 \frac{\Theta_k^{i+1} - \Theta_k^i}{\Delta F_0} + F_1 \frac{\Theta_k^{i+1} - 3\Theta_k^i + 3\Theta_k^{i-1} - \Theta_k^{i-2}}{\Delta F_0^2} +$$

$$\frac{\Theta_k^{i-1} - 2\Theta_k^i + \Theta_k^{i+1}}{\Delta F_0^2} = \frac{\Theta_{k-1}^{i-2} - 2\Theta_k^i + \Theta_{k+1}^i}{\Delta \xi^2} +$$

$$F_2 \left( \frac{\Theta_{k-1}^{i-2} - 2\Theta_k^i + \Theta_{k+1}^i}{\Delta \xi^2 \Delta F_0} + \frac{\Theta_{k-1}^{i-1} - 2\Theta_k^i + \Theta_{k+1}^{i-1}}{\Delta \xi^2 \Delta F_0} \right);$$

$$\Theta_k^0 = 1 - \xi_k; \quad \frac{\Theta_k^1 - \Theta_k^0}{\Delta F_0} = B(1 - \xi_k); \quad \frac{\Theta_k^0 - 2\Theta_k^1 + \Theta_k^2}{\Delta \xi} = 0;$$

$$\frac{\Theta_1^i - \Theta_0^i}{\Delta \xi} = F_4 \cos(F_5 F_{0i}); \quad \Theta_K^i = 0$$

Результаты выполненных исследований приведены на рис. 1 – 5. При  $F_1 = F_2 = F_3 = 0$  колебания незатухающие при любых значениях коэффициента  $B$ . При  $B = 0$ ,  $F_3 = 0,3$  и  $F_1 = F_2 = F_4 = F_5 = 0$  колебания становятся затухающими с экспоненциально уменьшающейся амплитудой (рис.1). С увеличением  $B$  изменяется профиль волн (рис. 2) и происходит уменьшение их амплитуды (в сравнении с вариантом, представленным на рис.1).

При  $F_1 = F_2 = F_3 = 0$  и  $F_4 = 0,5$ ,  $F_5 = 1,575$  безразмерная частота собственных колебаний стержня  $\nu = 1,575$  совпадает с частотой вынужденных колебаний, возникающих под действием внешней нагрузки вида (23). При этом наблюдается неограниченное возрастание амплитуды колебаний (рис. 3) при любых значениях коэффициента  $B$ . С увеличением коэффициента сопротивления среды  $F_3$  амплитуда колебаний стержня уменьшается и при каком-то большом его значении ( $F_3 \geq 100$ ) возврат стержня в исходное состояние происходит практически при отсутствии колебательного процесса внутренних

## Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317  
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582  
 GIF (Australia) = 0.564  
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
 ПИНЦ (Russia) = 3.939  
 ESJI (KZ) = 8.771  
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630  
 PIF (India) = 1.940  
 IBI (India) = 4.260  
 OAJI (USA) = 0.350

точек стержня при неизменной амплитуде колебаний внешней нагрузки (рис.4).

В случае учета сопротивления среды и релаксационных свойств материала при совпадении частоты собственных колебаний

стержня и частоты колебаний внешней нагрузки (резонансные колебания) могут возникать явления бифуркационного резонанса в затухающих и незатухающих процессах колебаний [9-10].

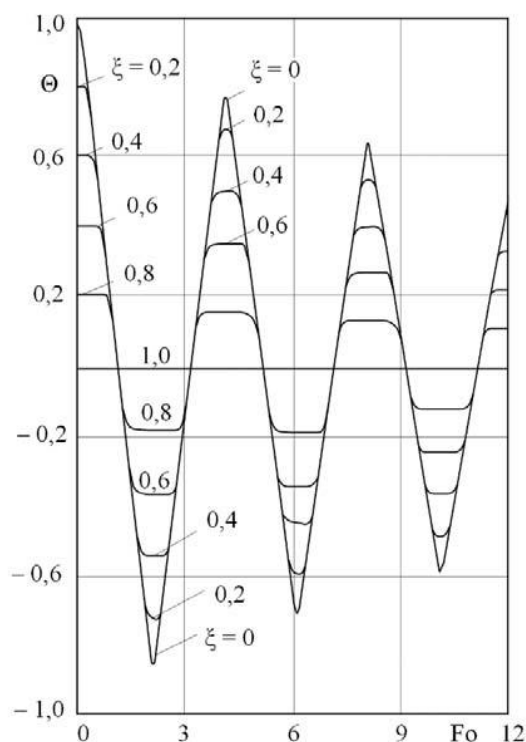


Рисунок 1 – Изменение перемещений стержня во времени (затухающие колебания)  
 $B = 0; F_1 = F_2 = F_4 = F_5 = 0; F_3 = 0,3$

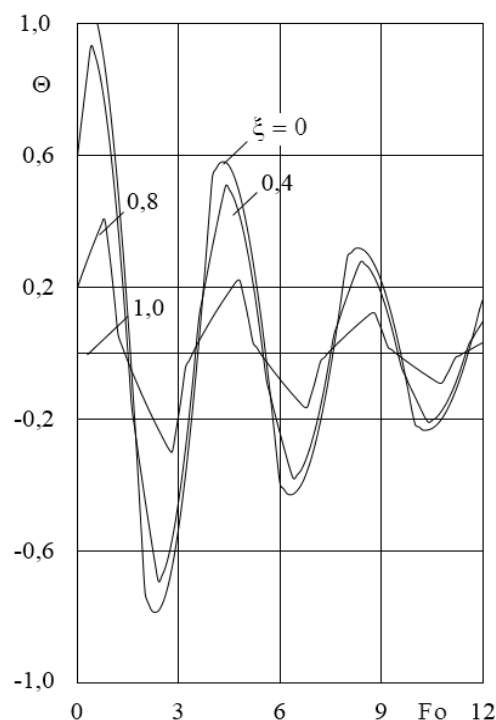


Рисунок 2 – Изменение перемещений стержня во времени (затухающие колебания);  
 $B = 1,5; F_1 = F_2 = F_4 = F_5 = 0; F_3 = 0,3$

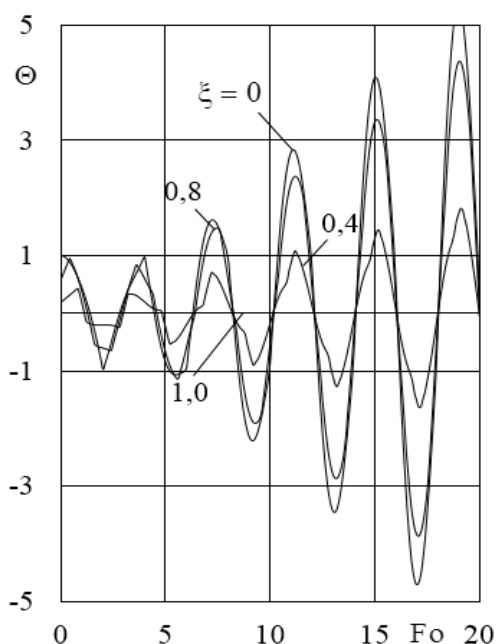


Рисунок 3 – Изменение перемещений стержня в резонансных частотах:  
 $B = 1,5; F_1 = F_2 = 0; F_3 = 100; F_4 = 1; F_5 = 1,575$

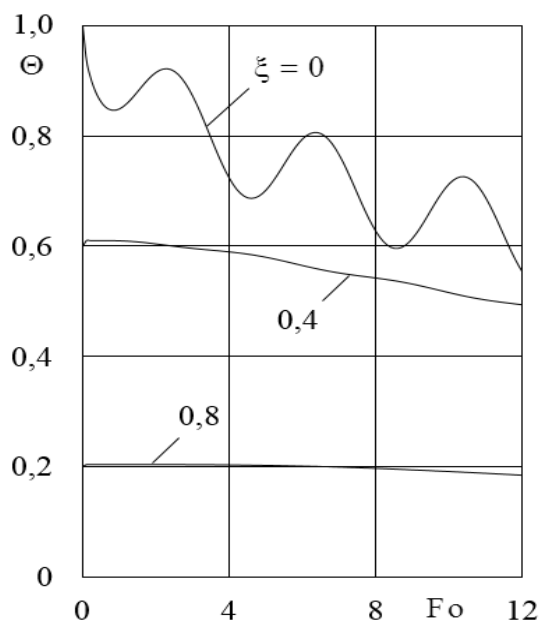


Рисунок 4 – Изменение перемещений в резонансных частотах:  
 $B = 1,5; F_1 = F_2 = F_3 = 0; F_4 = 0,5; F_5 = 1,575$

## Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317  
ISI (Dubai, UAE) = 1.582  
GIF (Australia) = 0.564  
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
ПИИЦ (Russia) = 3.939  
ESJI (KZ) = 8.771  
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630  
PIF (India) = 1.940  
IBI (India) = 4.260  
OAJI (USA) = 0.350

На рис. 5 приведены результаты расчетов для случая резонансных колебаний ( $F_5 = 1,575$ ) при  $B = 0$ ,  $F_1 = F_2 = 0,1$  и  $F_3 = 0,3$ . Их анализ позволяет заключить, что в диапазоне  $0 \leq F_0 \leq 9$

амплитуда колебаний экспоненциально уменьшается. Затем в диапазоне  $9 \leq F_0 \leq 25$  она возрастает, стабилизируясь на отметке  $A = 0,4$  при незатухающем во времени процессе колебаний.

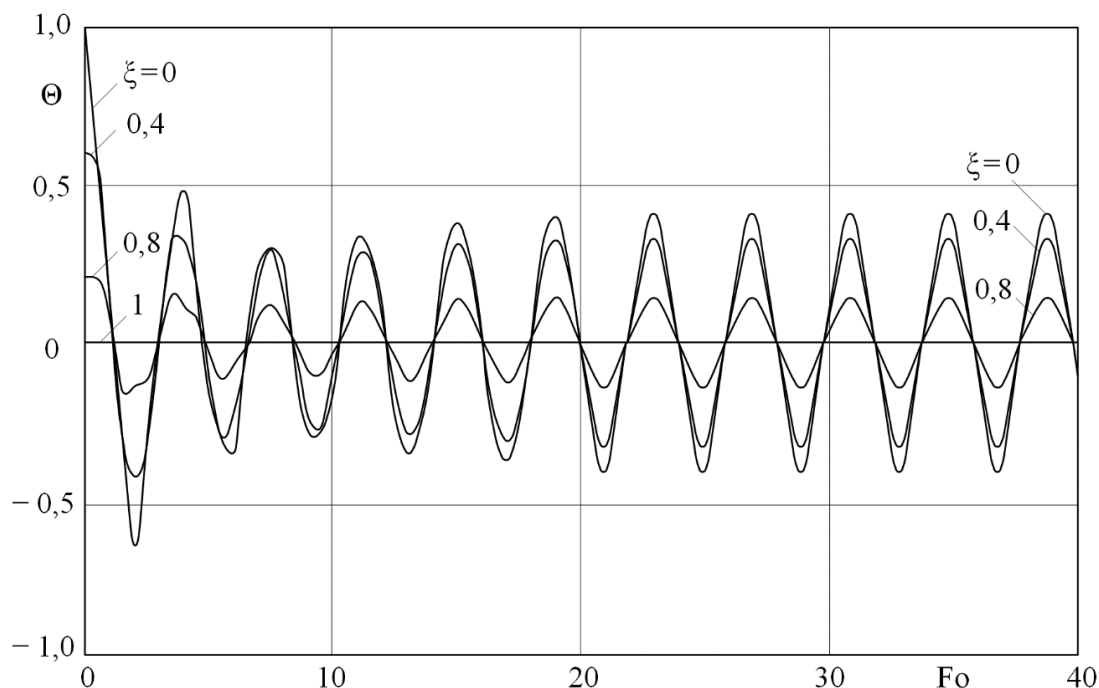


Рисунок 5 – Изменение перемещений стержня в резонансных частотах при  $B = 0$  ;  
 $F_1 = F_2 = 0,1$ ;  $F_3 = 0,3$ ;  $F_4 = 0,1$ ;  $F_5 = 1,575$

### Выводы

1. В случае равенства нулю коэффициента сопротивления среды и коэффициентов релаксации процесс колебаний стержня является затухающим, а форма профиля волны зависит от коэффициента  $B$  (рис. 1, 2).

2. При совпадении безразмерной частоты собственных колебаний стержня ( $\nu = 1,575$ ) с частотой колебаний внешней нагрузки ( $F_5 = 1,575$ ) для случая, когда  $F_1 = F_2 = F_3 = 0$ , при любых значениях коэффициента  $B$ , наступает резонанс,

при котором происходит неограниченное возрастание амплитуды колебаний (рис. 3).

3. При больших значениях коэффициента сопротивления среды ( $F_3 \geq 100$ ) наблюдается критическое затухание процесса колебаний (рис. 4).

4. В условиях резонансных колебаний ( $F_5 = 1,575$ ) при  $F_1 = F_2 = 0,1$  и  $F_3 = 0,3$  амплитуда колебаний сначала уменьшается ( $F_0 \leq 9$ ), а затем (при  $F_0 > 9$ ) возрастает, стабилизируясь на отметке  $A = 0,4$  (при  $F_0 > 25$ ), в незатухающем во времени процессе колебаний (рис. 5).

### References:

1. Kristensen, R. (1974). *Vvedenie v teoriyu vyzkouprugosti*. Moscow: Mir.
2. Babakov, I. M. (2004). *Teoriya kolebaniy*. (p.592). Moscow: Drofa.
3. Tixonov, A.N., & Samarskiy, A.A. (1999). *Uravneniya matematicheskoy fiziki*. (p.798). Moscow: Izd-vo MGU.
4. Kabisov, K. S., Kamalov, T. F., & Lur'e, V. A. (2010). *Kolebaniya i volnovye protsessy: Teoriya. Zadachi s resheniyami*. (p.360). Moscow: KomKniga.
5. Iyushin, A.A. (1990). *Mexanika sploshnoy sredy*. (p.287). Moscow: MGU.
6. Loytsyanskiy, L. G. (2003). *Mexanika jidkosti i gaza*. (p.840). Moscow: Drofa.
7. Filin, A. P. (1975). *Prikladnaya mexanika tverdogo deformiruemogo tela*. T. 1. (p.832). Moscow: Nauka.



<b>Impact Factor:</b>	<b>ISRA (India) = 6.317</b>	<b>SIS (USA) = 0.912</b>	<b>ICV (Poland) = 6.630</b>
	<b>ISI (Dubai, UAE) = 1.582</b>	<b>ПИИИ (Russia) = 3.939</b>	<b>PIF (India) = 1.940</b>
	<b>GIF (Australia) = 0.564</b>	<b>ESJI (KZ) = 8.771</b>	<b>IBI (India) = 4.260</b>
	<b>JIF = 1.500</b>	<b>SJIF (Morocco) = 7.184</b>	<b>OAJI (USA) = 0.350</b>

---

8. Pobedrya, B.E. (1988). *Chislennyye metody v teorii uprugosti i plastichnosti*. Moscow.
9. Safarov, I.I., Kulmurov, N.R., Teshayev, M.K., & Kuldashov, N.U. (2019). Interaction of Nonstationary Waves on Cylindrical Body. *Applied Mathematics*, 10, pp.435-447.
10. Safarov, I.I., Kulmurov, N.R., & Kuldashov, N.U. (2019). Diffraction of Surface Harmonic Viscoelastic Waves on a Multilayer Cylinder with a Liquid. *Applied Mathematics*, 10, pp. 468-484.