SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2023 **Issue:** 04 **Volume:** 120

Published: 26.04.2023 **http://T-Science.org**

Issue Article

A.I. Kamolov
Jizzakh State Pedagogical University
Associate Professor

BEST APPROXIMATIONS OF RANDOM PROCESSES BY LINEAR POSITIVE OPERATORS

Abstract: *The work studies asymptotic best approximations of random processes by linear positive operators in the mean square and uniform metrics.*

Key words: *Random process, linear positive operator, approximation, best constant, modulus of continuity.*
Language: *Russian*
Citation: Kamolov, A. I. (2023). Best approximations of random processes by linear positive operators. *ISJ Theoretical & Applied Science, 04 (120),* 262-265.
Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-04-120-49 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2023.04.120.49
Scopus ASCC: *2600.*

НАИЛУЧШИЕ АППРОКСИМАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ЛИНЕЙНЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Аннотация: *В работе исследуются наилучшие асимптотические аппроксимации случайных процессов линейными положительными операторами в среднеквадратичной и равномерной метриках.*

Ключевые слова: *случайный процесс, линейный положительный оператор, аппроксимация, наилучшая постоянная, модуль непрерывности.*

Введение

Пусть $\{X_k\}$, k=1,2,3,... - последовательность независимых, одинаково распределенных (н.о.р) случайных величин (сл.вел.) с функцией распределения, зависящая от параметра t такая, что

$$F_t(x) = \mathrm{P}\{X_1 < x\},\ \ \mathrm{M}X_1 = t,\ \ \mathrm{M}[X_1 - t]^2 = \sigma^2(t),\quad t \in \mathrm{T} \subset R^1.$$

Обозначим через $\overline{C_\Omega}(R^1)$– всех измеримых , равномерно непрерывных в ср.кв. действительных гильбертовых сл.пр. $\mathfrak{z}(t)$, $t \in \mathrm{R}^1$, на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ с ограниченной ковариационной функцией. Следуя [10] модулем непрерывности сл.пр. $\mathfrak{z}(t) \in \overline{C_\Omega}(R^1)$ назовем функцию

$$\omega_{\mathfrak{z}}(x) = \sup_{\substack{|t-s|\le x \\ -\infty<x,y<\infty}} \{M|\mathfrak{z}(t) - \mathfrak{z}(s)|^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Легко показать (см.[10],[11]), что $\omega_{\mathfrak{z}}(x)$ действительно обладает всеми свойствами модуля непрерывности ([8,стр.150]).

Согласно [7,стр.268], л.п.о.

$$\mathrm{P}_n(\mathfrak{z};\mathrm{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{z}(x)\,\mathrm{d}F_t^{(n)}(x), \qquad (1)$$

где $F_t^{(n)}(x) = P\{\frac{S_n}{n} < x\}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, определен для любого $\mathfrak{z}(t) \in \overline{C_\Omega}(R^1)$, $t \in \mathrm{T}$.

Рассмотрим приближение сл.пр. $\mathfrak{z}(t) \in \overline{C_\Omega}(R^1)$ л.п.о. (1) на компактном множестве $D \subset \mathrm{T}$.

Из результатов [10], [11] следует ,что

$$\max_{t\in D}\{\mathrm{M}|\mathfrak{z}(t) - P_n(\mathfrak{z},t)|^2\}^{\frac{1}{2}} \le \mathrm{C}\omega_{\mathfrak{z}}\left(1/\sqrt{n}\right). \qquad (2)$$

Наименьшая постоянная, которую можно поставит вместо константы С в правой части этого неравенства

$$\mathrm{C}_0 = \mathrm{C}_0(F) = \sup_{\substack{\mathfrak{z}(t)\in\overline{C_\Omega}(R^1) \\ n\in N}} \left\{\frac{\max_{t\in D}\{\mathrm{M}|\mathfrak{z}(t) - P_n(\mathfrak{z},t)|^2\}^{\frac{1}{2}}}{\omega_{\mathfrak{z}}\left(1/\sqrt{n}\right)}\right\}.$$

Вопрос нахождения точного значения наименьшей (“неулучшаемой”) константы C_0 пока остаётся открытой. Вместо нее в работе приводим асимптотически неулучшаемую константу, т.е. величину

$$\mathrm{C}_1 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\sup_{\mathfrak{z}(t)\in\overline{C_\Omega}(R^1)} \left\{\frac{\max_{t\in D}\{\mathrm{M}|\mathfrak{z}(t) - P_n(\mathfrak{z},t)|^2\}^{\frac{1}{2}}}{\omega_{\mathfrak{z}}\left(1/\sqrt{n}\right)}\right\}\right]$$

Относительно последовательности $\{X_k\}$, k=1,2,…
предположим, что выполнены условия

(A_1): $sup_{t\in D} M|\ X_1|^3 \le L < \infty$,

(B_1): $sup_{t\in D}\ \{\sigma^2(t)\} = \sigma^2(t_0) = \sigma^2 > 0$, $t_0 \in D$

Положим

$$ӕ(\sigma) = 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\{\Phi((k+1)/\sigma) - \Phi(k/\sigma)\},$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{z} \exp\{-\frac{x^2}{2}\}\,dx.$

Теорема 1. Если выполнены условия (A_1) и (B_1), то:

а) для любых $\xi(t) \in \overline{C_\Omega}(R^1)$ и $\varepsilon > 0$ существует $n_0(\varepsilon) \in N$ такое, что для всех $n > n_0(\varepsilon)$ имеет место соотношение:

$$\max_{t\in D}\{M|\xi(t) - P_n(\xi,t)|^2\}^{\frac{1}{2}} < [ӕ(\sigma) + \varepsilon]\omega_\xi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (3)$$

б) неравенство (3) неулучшаемо для класса $\overline{C_\Omega}(R^1)$ в том смысле,что для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_1(\varepsilon) \in N$ и сл.пр.$\hat{\xi}_n(t) \in \overline{C_\Omega}(R^1)$ такое, что для всех $n > n_1(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\max_{t\in D}\{M|\xi(t) - P_n(\hat{\xi}_n, t)|^2\}^{\frac{1}{2}} > [ӕ(\sigma) - \varepsilon]\,\omega_{\hat{\xi}_n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Теорема 2. Если выполнены условия (A_1) и (B_1), то имеет место соотношение:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\sup_{\xi(t)\in\overline{C_\Omega}(R^1)}\left\{\frac{\max_{t\in D}\{M|\xi(t) - P_n(\xi,t)|^2\}^{\frac{1}{2}}}{\omega_\xi\left(1/\sqrt{n}\right)}\right\}\right] = ӕ(\sigma)$$

Примеры.

Пусть $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$- последователность н.о.р. сл.вел., порождаюшая л.п.о. $P_n(\xi;t)$ такая, что

1) X_1- имеет пассоновское распределение с параметром $t\in T = [0,\infty)$. Тогда $P_n(\xi;t) = \sum_{k=1}^{\infty}\exp\{-nt\}\xi(k/n)\frac{(nt)^k}{k!}$ – оператор Миракьяна.

Пусть $D = [0,1]$. В этом случае неулучшаемой константой в смысле теоремы 1 в оценке (2)

$$ӕ(\sigma) = ӕ(1) = 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)[\Phi(k+1) - \Phi(k)]$$

2) X_1- имеет нормальное распределение с параметрами $t \in T = [0,\infty)$ и $\sigma > 0$. Тогда $P_n(\xi;t) = \int_{-\infty}^{\infty}\xi(x)\exp\left\{-\frac{n(x-t)^2}{2\sigma^2}\right\}dx$. Если $\sigma = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то

$P_n(\xi;t) = \int_{-\infty}^{\infty}\xi(x)\exp\{-n(x-t)^2\}\,dx$ – оператор Вейерштрасса.

Пусть $D = [0,1]$. В этом случае не лучшаемой константой в смысле теоремы 1 в оценке (2)

$$ӕ(\sigma) = ӕ\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)[\Phi(\sqrt{2}(k+1)) - \Phi(\sqrt{2}k)]$$

3) X_1 – бернуллевская сл.вел. с парметром t, $t\in T = [0,1]$. Тогда

$P_n(\xi;t) = B_n(\xi;t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\,\xi(k/n)t^k(1-t)^{n-k}$ - полином Бернштейна.

Если $D = [0,1]$, то не лучшаемой константой в смысле теоремы 1 в оценке (2)

$$ӕ(\sigma) = ӕ\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)[\Phi(2(k+1)) - \Phi(2k)]$$

Этот результат для неслучайных функций был получен в работе [12].

Нетрудно показать, что

$$\{M|\xi(t) - P_n(\xi,t)|^2\}^{\frac{1}{2}} \le C\omega_\xi\left(\frac{\sigma(t)}{\sqrt{n}}\right),\ C < 2, \quad (4)$$

которое показывает, что в окрестности нуля дисперсии $\sigma(t)$ порядок приближения улучшается.

Исследование оптимальных констант в оценке (4) приводит к сложным вычисленям, связанным со спецификой распределения $F_t^{(n)}(x)$. Лишь в частном случае, когда X_1 – бернуллевская сл.вел. с параметром $t \in T = [0,1]$ (случай полинома Бернштейна), удается вычислить асимптотически оптимальную константу в оценке (4).

Теорема 3. а) для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0(\varepsilon) \in N$ такое, что для всех $n > n_0(\varepsilon)$ $t \in [0,1]$ и для любого непрерывного в ср.кв. на отрезке [0, 1] действительного сл.пр. $\xi(t)$ имеет место неравенство:

$$\{M|\xi(t) - B_n(\xi;t)|^2\}^{\frac{1}{2}} < \left(1 + \frac{2}{e} + \varepsilon\right)\omega_\xi\left(\sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}\right), \quad (5)$$

b) неравенство (5) неулучшаемо в том смысле, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся $n_1(\varepsilon) \in N$, $t_n \in [0,1]$ и непрерывный в ср.кв. на отрезке [0,1] сл. пр. $\xi n(t)$ такие, что для всех $n > n_1(\varepsilon)$

$$\{M|\xi n(t_n) - B_n(\xi n;t_n)|^2\}^{\frac{1}{2}} > \left(1 + \frac{2}{e} - \varepsilon\right)\omega_{\xi_n}\left(\sqrt{\frac{t_n(1-t_n)}{n}}\right)$$

Теорема 4. Имеет место соотношение:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup\left\{\frac{\{M[\xi(t) - B_n(\xi;t)]^2\}^{\frac{1}{2}}}{\omega_\xi\left(\sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}\right)}\right\} = 1 + \frac{2}{e},$$

где супремум берётся по всем $t \in (0,1)$ и по всем непрерывным в ср.кв. на отрезке [0,1] сл. пр. $\xi(t)$.

В детирминированном случае, т.е. когда $\xi(t)$ - неслучайная функция, из теорем 1 - 4 вытекают следуюшие результаты:

Пусть $\overline{C}(R^1)$ – класс всех равномерно непрерывных и ограниченных на R^1функций. Рассмотрим приближение функции $f(t) \in \overline{C}(R^1)$ на компактном множестве $D \subset T$ л.п.о.

$$P_n(f;t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dF_t^{(n)}(x)$$

Обозначим через

$$\omega_f(x) = \max_{\substack{|t-s|\le x\\ -\infty<t,s<\infty}} |f(t) - f(s)| -$$

модуль непрерывности функции $f(x)$.

Теорема 5. Если выполнены условия (A_1) и (B_1), то:

а) для любых $f(x) \in \overline{C}(R^1)$ и $\varepsilon > 0$ существует $n_0(\varepsilon) \in N$ такое,что для всех $n > n_0(\varepsilon)$ имеет место соотношение:

$$\max_{t\in D}|f(x) - P_n(f,x)| < [ӕ(\sigma) + \varepsilon]\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (6)$$

b) неравенство (6) неулучшаемо для класса $\overline{C}(R^1)$ в том смысле, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_1(\varepsilon) \in N$ и функция $fn(x) \in \overline{C_\Omega}(R^1)$ такое, что для всех $n > n_1(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\max_{t\in D}\{ M| fn(x) - P_n(fn,x)|^2\}^{\frac{1}{2}} > æ(\sigma)\text{-}\varepsilon]\, \omega_{fn}(\tfrac{1}{\sqrt{n}})$$

Теорема 6. **([13])** Если выполнены условия (A₁) и (B₁), то имеет место соотношение:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\Big[\sup_{f(x)\in\overline{C}(R^1)}\Big\{\frac{| f(x)-P_n(f,x)|}{\omega_f\left(1/\sqrt{n}\right)}\Big\}\Big] = æ(\sigma),$$

Теорема 7. a) для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0(\varepsilon) \in N$ такое, что для всех $n > n_0(\varepsilon)$ $t. \in [0,1]$ и для любого непрерывного на [0,1] функции $f(x)$ имеет место неравенство:

$$|f(t) - B_n(f,t)| < [1 + \tfrac{2}{e} - \varepsilon]\omega_f\Big(\sqrt{\tfrac{t(1-t)}{n}}\Big) \quad (7)$$

b) неравенство (7) неулучшаемо в том смысле, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся $n_1(\varepsilon) \in N$, $t_n \in [0,1]$, непрерывный на отрезке [0,1] функция $fn(x)$ такие, что для всех $n > n_1(\varepsilon)$

$$|f(t) - B_n(f_n,t)| > [1 + \tfrac{2}{e} \text{-}\ \varepsilon]\ \omega_{fn}(\tfrac{1}{\sqrt{n}}).$$

Теорема 8. Имеет местосоотношение:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup\Big\{\frac{|f(t)-B_n(f,t)|}{\omega_f\Big(\sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}\Big)}\Big\} = 1 + \frac{2}{e},$$

где супремум берётся по всем $t \in (0,1)$ и по всем непрерывным на отрезке [0,1] функциям $f(t)$.

Теоремы 5 - 8 относящийся к неслучайным функциям имеют самостоятельный интерес в классической теории приближения неслучайных функций.

Пусть теперь, $\mathfrak{Z}(t) \in \overline{C_\Omega}(R^1)$ сепарабельный субгауссовский действительный непрерывный с вероятностью единица сл.пр. удовлетворяет условию

(A₂): $\| \mathfrak{Z}(t) - \mathfrak{Z}(s)\|_{sub} \le \omega(|t - s|)$, $t, s \in R^1$,

где $\omega(z)$ – некоторый модуль непрерывности , для которой существует обратная функция $\omega^{-1}(x)$ и интеграл $\int_0^1 \frac{\omega(z)}{z\sqrt{|lnz|}}dz < \infty$. (норма $\| * \|_{sub}$ - введена в работе [6]).

Относительно $dF_t^{(n)}(x)$ предположим, что выполнено условие

(B₂): Функция $dF_t^{(n)}(x)$ непрерывно дифференцируема по $t \in T$ для любых $x \in R^1$ и $n \in N$, причем

$[dF_t^{(n)}(x)]'_t = \rho_t^{(n)}(x)\, dF_t^{(n)}(x)$, где непрерывные по t и x, $t \in T$, $x \in R^1$ функции $\rho_t^{(n)}(x)$ такие, что

$$\sup_{t\in T}\int_{-\infty}^{\infty} |\rho_t^{(n)}(x)|\ dF_t^{(n)}(x) < \infty$$

Отметим, что условие (B₂) использовано в работе [10] при совместном приближении в ср.кв. метрике сл.пр. и их производных л.п.о. (1).

Если выполнено условие (B₂), то согласно [7, стр.268] для любого $t \in T$ сл.пр. $P_n(\mathfrak{Z},t)$ дифференцируема с вероятностью единица и производная

$$P_n'(\mathfrak{Z};t) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{Z}(t)\,\rho_t^{(n)}(x)\, dF_t^{(n)}(x).$$

Очевидно, что сл.пр. $P_n'(\mathfrak{Z};t)$ – субгауссовский, т.е. $MP_n'(\mathfrak{Z};t) = 0$ и $\sup_{t\in T}\|P_n'(\mathfrak{Z};t)\|_{sub} < \infty$ для любого фиксированного $n \in N$.

Исследуем нормированный процесс уклонений

$$\zeta_n(t) = \frac{[\mathfrak{Z}(t)-P_n(\mathfrak{Z},t)]}{C_2\omega(\frac{1}{\sqrt{n}})},\ \text{где}\ C_2 = 1+\sigma,\ \sigma = \sup_{t\in D}\sigma(t).$$

В силу непрерывности сл.пр. $\mathfrak{Z}(t)$, сл.пр. $\zeta_n(t)$ также непрерывен с вероятностью единица.

Обозначим через $\alpha_n = \sup_{t\in D}\|P_n'(\mathfrak{Z};t)\|_{sub}$,

$r_D = \min\{t: t\in D\}$, $R_D = max\{t: t \in D\}$,

$$C_D^\omega = \frac{2(R_D - r_D)}{\omega(R_D - r_D)},\quad \beta_n = \frac{C_0\omega(\frac{1}{\sqrt{n}})}{1+C_D^\omega\alpha_n}.$$

Теорема 9. Пусть выполнены условия (A₂) и (B₂). Тогда для всех $z \ge 64$ имеет место неравенство

$$P\{\max_{t\in D}\frac{|\zeta_n(t)|}{\gamma_n} \ge \frac{\sqrt{2}}{2}z\} \le 2exp\{\text{-}\frac{z^2}{16}\tau_n^2\},\ \text{где}$$

$$\gamma_n = \sqrt{|\ln[R_D - r_D] + 2\omega^{-1}(C_2\omega(1))|} + \sqrt{\Big|ln\frac{1}{\omega^{-1}(\beta_n)}\Big|} + \frac{1}{2\beta_n}\int_0^{\omega^{-1}(\beta_n)}\frac{\omega(z)}{z\sqrt{|lnz|}}dz.$$

В практике вычисление величин α_n для конкретных л.п.о. может быть затруднительным. Если в таких случаях известна некоторая мажоранта $\hat{\alpha}_n$ для α_n, то теорему 1 можно использовать пологая $\alpha_n = \hat{\alpha}_n$.

Следствие 1. Пусть выполнены условия (A₂), (B₂) и (C₂): существует последовательность $\hat{\alpha}_n$, $0 < \hat{\alpha}_n < \infty$, такие, что $\alpha_n \le \hat{\alpha}_n$ для всех $n \in N$.

Тогда для $z \ge 64$ имеет место неравенство

$$P\{\max_{t\in D}\frac{|\zeta_n(t)|}{\hat{\gamma}_n} \ge \frac{\sqrt{2}}{2}z\} \le exp\{\text{-}\frac{z^2}{16}\hat{\gamma}_n^{\ 2}\},\quad \text{где}$$

$$\hat{\gamma}_n = \sqrt{|\ln[R_D - r_D] + 2\omega^{-1}(C_2\omega(1))|} + \sqrt{\Big|ln\frac{1}{\omega^{-1}(\hat{\beta}_n)}\Big|} + \frac{1}{2\hat{\beta}_n}\int_0^{\omega^{-1}(\hat{\beta}_n)}\frac{\omega(z)}{z\sqrt{|lnz|}}dz,$$

где $\hat{\beta}_n = \dfrac{C_2\omega(\frac{1}{\sqrt{n}})}{1+C_D^\omega\hat{\alpha}_n}$.

Следствие 2. Пусть выполнены условия (A₂), (B₂), (C₂). Если $\omega(1/n)\hat{\gamma}_n \downarrow 0$, при $n \to \infty$, то для всех $n \ge n_0 + 1$

$P\{\max_{t\in D}|\mathfrak{Z}(t) - P_n(\mathfrak{Z};t)| < \mathcal{E}\} \ge 1\text{-}\ \delta$, где $\mathcal{E} > 0$, $0 < \delta < \infty$,

$n_0 = n_0(n_0,\delta) = min\{ n \in N:\ C_2\sqrt{2}\ \ \omega(1/n)\ (32\hat{\gamma}_n + 2\sqrt{ln\frac{2}{n}}) \le \mathcal{E}\}$.

Рассмотрим пример.

Пусть $\mathfrak{Z}_0(t) \in C_\Omega(R^1)$ – гауссовский сепарабельный стационарный в широком смысле сл.пр. с нулевым средним, единичной дисперсией и непрерывной корреляционной функцией $r(t)$, удовлетворяющей следующему условию ([1] - [4]):

$r(t) = 1 - |t|^{2\alpha} + f(t),\ 0 < \alpha \leq 1,$

$f(t) = o(|t|^{2\alpha})$, при $t \to 0$.

Тогда существует $C_3 > 0$ такое, что

$$\| \mathfrak{z}_0(t) - \mathfrak{z}_0(s) \|_{sub} = \{M[\mathfrak{z}_0(t) - \mathfrak{z}_0(s)]^2\}^{\frac{1}{2}} \leq C_3|t-s|^{\alpha},$$

т. е. для сл.пр. $\mathfrak{z}_0(t)$ условие (A_2) выполнено, причем $\omega(x) = C_3|x|^{\alpha}$.

Рассмотрим приближение сл.пр. $\mathfrak{z}_0(t)$ полиномом Бернштейна

$$P_n(\mathfrak{z}_0; t) = B_n(\mathfrak{z}_0; t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, \mathfrak{z}_0\left(\tfrac{k}{n}\right) t^k (1-t)^{n-k},$$

$t \in T = [0,1]$.

Пусть D = T. Нетрудно показать, что условие (B_2) выполнено, причем

$\alpha_n = \sup_{t \in D} \| B_n'(\mathfrak{z}_0; t) \|_{sub} \leq 4n^3$, т.е. условие (C_2) выполнено для $\hat{\alpha}_n = 4n^3$. Вычисления величин, фигурирующих в следствии 2 дают, что

$r_D = 0$, $R_D = 1$, $C_2 = 1 + \sigma = 1{,}5$, $C_D^{\omega} = 2/C_3$.

$$\hat{\gamma}_n = \sqrt{\ln\left[1 + 2\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left[\sqrt{\left|\ln \frac{2(C_3+8n^3)\sqrt{n^{\alpha}}}{3C_3}\right|} + \right.$$

$+\varepsilon_n(\alpha)]$, где

$$\varepsilon_n(\alpha) = \frac{2(C_3+8n^3)\sqrt{n^{\alpha}}}{3C_3} \int_{n_\alpha}^{\infty} \exp\{-z^2\}\, dz,$$

$$n_\alpha = \sqrt{\left|\ln \frac{2(C_3+8n^3)\sqrt{n^{\alpha}}}{3C_3}\right|} \quad \text{причем,}$$

$$\varepsilon_n(\alpha) \sim \frac{1}{\sqrt{\left|\ln \frac{2(C_3+8n^3)\sqrt{n^{\alpha}}}{3C_3}\right|}}, \text{ при } n \to \infty.$$

Так как $\hat{\gamma}_n n^{-\frac{\alpha}{2}} \downarrow 0$ при $n \to \infty$, то согласно следствию 2 для всех

$$n \geq \min_{n \in N}\left\{ \frac{3\sqrt{2}}{2} C_3 n^{-\frac{\alpha}{2}} \left[32\left(\sqrt{\ln\left[1 + 2\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left[\sqrt{\left|\ln \frac{2(C_3+8n^3)\sqrt{n^{\alpha}}}{3C_3}\right|} + \varepsilon_n(\alpha)\right]\right) + 2\sqrt{\ln\frac{2}{\delta}}\,\right] \leq \varepsilon \right\}$$

имеет место неравенство

$$P\left\{\max_{t \in D} \left| \mathfrak{z}_0(t) - \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, \mathfrak{z}_0\left(\tfrac{k}{n}\right) t^k (1-t)^{n-k} \right| < \varepsilon \right\} \geq$$

$\geq 1 - \delta$, где $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < 1$,

References:

1. Belyaev, Yu.K., & Simonyan, A.Kh. (1977). *Asimptotika chisla ukloneniy gaussovskogo protsessa ot approksimiruyushchey sluchaynoy krivoy*, Tezisy dokladov II Vilnyuskoy konferentsii po teor. ver. i mat. statistike, T.I, (pp.31-32). Vilnyus.
2. Belyaev, Yu.K., Simonyan, A.Kh., & Krasavkina, V.A. (1976). Kvantovanie po vremeni realizatsiy nedifferentsiruemykh gaussovskikh protsessov. *Izv. AN SSSR, Tekh. kibernetika*, № 4, pp. 139-147.
3. Seleznyov, O.V. (1980). Priblizhenie periodicheskikh gaussovskikh protsessov trigonometricheskimi polinomami. *Doklady AN SSSR*, 1980,250, I, pp. 35-38.
4. Seleznyov, O.V. (1979). *O priblizhenii neprekratykh periodicheskikh gaussovskikh protsessov sluchaynymi trigonometricheskimi plinomami*. V sb.: "Sluchaynye protsessy i polya", (pp. 84-94). Izd-vo MGU.
5. Simonyan, A.Kh. (n.d.). O veroyatnosti ukloneniya gaussovskogo sluchaynogo protsessa ot approksimiruyushchey sluchaynoy krivoy. *Doklady AN Arm. SSR*. XVI, 2, I978, pp. 84-90.
6. Buldygin, V.V., & Kozochenko, Yu.V. (1980). O subgaussovskikh sluchaynykh velichinakh. *Ukrainskiy mat. zhurn.* 32, N2, pp. 723-730.
7. Gikhman, I.I., & Skorokhod, A.V. (1971). *Teoriya sluchaynykh protsessov*. t. I, M.: "Nauka".
8. Dzyadyk, V.K. (1977). *Vvedenie v teoriyu ravnomernogo priblizheniya funktsiy polinomami*. M.: "Nauka".
9. Drozhzhina, L.V. (1975). O lineynoy approksimatsii sluchaynykh poley. *Teoriya veroyatn. i matematich. statistika*, vyp. 13, pp. 46-52.
10. Drozhzhina, L.V. (1984). Sovmestnoe priblizhenie sluchaynykh protsessov i ikh proizvodnykh lineynymi polozhitelnymi operatorami. *Doklady AN USSR*, A, № pp.7-8.
11. Nagornyy, V.N., & Yadrenko, M.I. (1971). Polinomilnaya interpolatsiya vypadkovykh protsessov. *Vistnik KDU, Seriya matematiki ta mekhaniki*, № 13, pp.10-12.
12. Essen, C.G. (1960). Uber die asymptotisch beste Approxi- mation atetiger Funktionen mit Helfe von Bernstein-Polynonen. *Numerische Math.*, 2, pp.206-213.
13. Ho˙lzle, G.E. (1980). On the degree of approximation of continuous by a class of seguences of liear positive operators. *Proc.Kon.ned.akad.wetensch.* A 83, 1980, No 2, pp.171-181.