SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal

Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2023 **Issue:** 06 **Volume:** 122

Published: 15.06.2023 **http://T-Science.org**

Issue Article

Zokir Bozorboyevich Khudayberdiyev
Samarkand State University
Senior Lecture to Department of
Theoretical and Applied Mechanics,
xudoyberdiyevz@mail.ru

Jahongir Zokirovich Rahmatov
Samarkand State University
Student

Zulfira Begmurod qizi Suyunova
Samarkand State University
Masters

Zaxriddin Ulugbekovich Mamirov
Samarkand State University
Masters

TRANSVERSE VIBRATIONS OF A TWO-LAYER PLATE

Abstract: *The paper considers the problem of vibrations of a three-layer viscoelastic plate and a three-layer conical shell. A three-layer plate and a three-layer conical shell are assumed to be three-dimensional bodies. The equations of motion are derived with respect to the principal components of the displacements of the middle surface. The resulting oscillation equations are solved. Appropriate conclusions were made on the basis of the decisions.*

Key words: *Plates, solutions, equations, oscillations, layer, algorithm.*

Language: *Russian*

Citation: Khudayberdiyev, Z. B., Rahmatov, J. Z., Suyunova, Z. B., & Mamirov, Z. U. (2023). Transverse vibrations of a two-layer plate. *ISJ Theoretical & Applied Science, 06 (122)*, 201-204.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-06-122-30 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2023.06.122.30

Scopus ASCC: *2200.*

УРАВНЕНИЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ И КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Аннотация: *В работе рассматривается задача о колебаниях трехслойной вязкоупругой пластины и трехслойной конической оболочки. Трехслойная пластина и трехслойная коническая оболочка предполагаются трехмерными телами. Уравнения движения выводятся относительно главных компонент перемещений срединной поверхности. Полученные уравнения колебаний решаются. На основании решений были сделаны соответствующие выводы.*

Ключевые слова: *Пластинки, решений, уравнений, колебания, слой, алгоритм.*

Введение

Трехслойные пластины и конические оболочки находят широкое применение в различных областях техники. В таких случаях динамический расчет трехслойных пластин и конических оболочек основывается на гипотезах Кирхгофа. Количество научных работ этого типа очень велико. Большой вклад в дальнейшее развитие классической теории внесли С. Г. Лехницкий, С. А. Амбарцумян, Г. И. Петрашень и другие. Их исследования можно разделить на два направления: асимптотические теории и теории

Тимошенко и Рейсснера. В последние годы прошлого века Г. И. Петрашень разработал теорию расчета трехслойных пластин и оболочек, основанную на методе точных решений.

Используя этот метод, профессор И. Г. Филиппов и его ученики разработали уравнения колебаний двухслойных и трехслойных пластин и оболочек. В их работе были допущены некоторые недостатки в получении уравнений колебаний трехслойных пластин и оболочек: 1) рассматривались только трехслойные пластины с симметричной структурой; 2) в качестве неизвестных принимаются начальные части перемещений точек срединной поверхности слоя засыпки. Всего их шесть. Если граничные условия четко сформулированы, число неизвестных увеличивается до двенадцати. Об этом говорят сами авторы; 3) граничные условия формулируются относительно головных частей срединных перемещений. Теоретически это неверно; 4) эти факторы вынуждают авторов идти на существенные упрощения, приводящие к некоторым неточностям, вследствие чего уравнения колебаний трехслойных пластин и оболочек приближаются к уравнению колебаний однородных пластин и оболочек; 5) уравнения, полученные для трехслойных пластин и оболочек, не переходят в уравнения колебаний однослойных и двухслойных пластин и оболочек. Отсутствие одного из трехслойных слоев пластины и оболочки приводит к отсутствию второго внешнего слоя.

На сегодняшний день поперечные и крутильные колебания трехслойных пластин и оболочек изучены недостаточно.

Постановка задачи.

Рассмотрим трехслойную составную пластину и упругую коническую оболочку, шарнирно закрепленную с обоих концов. Считаем, что рассматриваемая трехслойная пластина и оболочка являются трехмерными телами. Введем декартову систему координат $Oxyz$ в трехслойную пластину и цилиндрическую систему координат $Or\theta z$ в трехслойную оболочку. Назовем трехслойные слои пластины и оболочки нулевыми первым и вторым слоями.

Рассмотрим трехслойную пластину в состоянии плоской деформации и трехслойную оболочку в осесимметричном состоянии.

Получаем зависимость между напряжениями и деформациями в точках трехслойной пластины и слоев конической оболочки в виде закона Гука.

$$\sigma_{ii}^{(m)} = \lambda_m \varepsilon_{ii}^{(m)} + 2\mu_m \varepsilon_{ii}^{(m)};\ \sigma_{ij}^{(m)} = 2\mu_m \varepsilon_{ij}^{(m)}. \quad (1)$$

Уравнения движения точек слоев трехслойной пластины и конической оболочки записываются следующим образом.

$$\sigma_{ij,j}^{(m)} = \rho_m \ddot{\vec{U}}^{(m)} \quad (2)$$

где $\vec{U}^{(m)}$ – векторы перемещения точек трехслойной пластины и слоев конической оболочки; t –время. Скаляр -φ_m и потенциальные функции - $\vec{\psi}_m$ вводятся вектором перемещения следующим образом.

$$\vec{U}^{(m)} = grad\varphi_m + rot\vec{\psi}_m \quad (3)$$

При этом считается, что векторные потенциалы $\vec{\psi}_m$ удовлетворяют условиям соленоидальности векторных полей

$$div\,\vec{\psi}_m = 0 \quad (4)$$

Подставляя (3) в систему (2), легко получить уравнения движения точек трехслойной пластины и слоев оболочки в виде волновых уравнений для продольного φ_m и $\vec{\psi}_m$ поперечного волновых потенциалов.

При плоской деформации векторы смещения точек трехслойной пластины и слоев оболочки имеют только две составляющие $\vec{U}^m = \vec{U}^m(U_m, W_m)$.

В случае плоской деформации, учитывая, что векторы перемещений точек слоев разлагаются только по единичным ортам $\vec{\imath}$, $\vec{k}$ уравнения движения приводятся к волновым уравнениям

$$\Delta\varphi_m = \ddot{\varphi}_m/a_m^2;\ \Delta\psi_m = \ddot{\psi}_m/b_m^2, \quad (5)$$

где a_m, b_m- скорости распространения продольной и поперечной волны в слоях трехслойной пластины; Δ – двумерный дифференциальный оператор Лапласа. При этом компоненты вектора перемещений точек слоев трехслойной пластины и точек слоев трехслойной оболочки представляются функциями φ и ψ_m. Компоненты тензоров деформаций и напряжений также записываются потенциальными функциями φ и ψ_m.

При t<0 предполагается, что трехслойные пластины и оболочки покоятся. С момента t=0 на его поверхности начали действовать динамические силы. В силу линейности задачи можно представить полей перемещений, в виде наложения симметричной и антисимметричной частей

$$\vec{U}_m = \vec{U}_m^s + \vec{U}_m^a,$$

где $\vec{U}_m^s$ – симметричная (продольная), $\vec{U}_m^a$-антисимметричная (изгибная) части полей перемещений слоев пластины. При этом симметричные части должны удовлетворять граничным условиям

при $z = (-1)^{i-1}h_i^*$, $h_i^* = h_0 + h_i$

$$\sigma_{xz}^{(i)} = f_x^{(i)};\ \sigma_{zz}^{(i)} = f_z^{(i)};\ (i = 1,2). \quad (6)$$

Кроме того, к трехслойным пластинчатым поверхностям применяются следующие динамические и кинематические условия:

при $z = h_0$

$$\sigma_{xz}^{(0)} = \sigma_{xz}^{(1)}, \sigma_{zz}^{(0)} = \sigma_{zz}^{(1)}, U_0 = U_1, W_0 = W_1. \quad (7)$$

Начальные условия нулевые.

Метод решения.

Для решения задачи необходимо задать выражения для функций $f_x^{(0,1)}(x,t)$ и $f_z^{(0,1)}(x,t)$ из граничных условий. Поэтому введем функции внешнего воздействия в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} f_x^{(0,1)} &= \int_0^\infty \begin{Bmatrix} coskx \\ sinkx \end{Bmatrix} dk \int_{(l)} \tilde{f}_x^{(0,1)} e^{pt} dp \\ f_z^{(0,1)} &= \int_0^\infty \begin{Bmatrix} sinkx \\ -coskx \end{Bmatrix} dk \int_{(l)} \tilde{f}_z^{(0,1)} e^{pt} dp \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

где $f_x^{(0,1)}$, $f_z^{(0,1)}$ – функции, регулярные при $Rep \geq 0$ имеющие конечное число полюсов, принимающие произвольные значения внутри некоторой области Ω, содержащий промежуток $(-i\omega_0; i\omega_0)$ мнимой оси, убывающие при $p \to i\infty$ не медленнее, чем $|p|^{-n_0}$, где $n_0 \gg 1$, и такие, что вне Ω их значения пренебрежимо малы. Кроме того функции $\tilde{f}_x^{(0,1)}$ и $\tilde{f}_z^{(0,1)}$ – аналитические, принимающие произвольные значения в промежутки $(0,k_0)$, убывающие при $k \to \infty$, как k^{-n_0}, и пренебрежимо малые при $k > k_0$; (l) – контур $Rep = \nu > 0$ на комплексной плоскости (p), оставляющего область Ω правее себя.

В соответствие с принятыми представлениями функций внешнего воздействия решение поставленной задачи также ищем в виде (4). Это позволяет получить из (5) обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка. В случае симметричных воздействий, когда будут иметь место продольные колебания пластины и оболочки, решением полученных уравнений будет

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\varphi}_m(z,k,p) &= A_m^1 ch(\alpha_m z) \\ \tilde{\psi}_m(z,k,p) &= B_m^1 sh(\beta_m z) \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

где

$$\alpha_m^2 = k^2 + p^2/a_m^2\,;\ \beta_m^2 = k^2 + p^2/b_m^2.$$

Перемещения U_m и W_m также представим в виде (8) и подставляя вместе с (9) в выражения перемещений, для преобразованных $\tilde{U}_m$ и $\tilde{W}_m$ будем иметь выражения через гиперболические функции и постоянные интегрирования. Далее с использованием стандартных разложений гиперболических функций в степенные ряды, получим

$$\left.\begin{aligned} \tilde{U}_m &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[k\alpha_m^{2n} A_m^{(1)} - \beta_m^{2n+1} B_m^{(1)}\right] \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\ \tilde{W}_m &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_m^{2n+2} A_m^{(1)} - k\beta_m^{2n+1} B_m^{(1)}\right] \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}\right\} (10)$$

В качестве искомых функций в уравнениях колебания трехслойной пластинки примем главные части преобразованных перемещений $\tilde{U}_0$ и $\tilde{W}_0$ такой поверхности нулевого слоя, расстояние от поверхности $z = 0$ которой определяется формулой

$$\xi = \chi \cdot h_0;\ -1 \leq \chi < 0; 0 \leq \chi < 1$$

где $\chi -$ постоянное число, удовлетворяющее неравенству $-1 \leq \chi \leq 1$. Для этого в выражениях (10) примем $z = \xi$, $m = 0$ и $n = 0$. Тогда введя обозначения $\tilde{U}_0^{(0)}$ и $\tilde{W}_0^{(0)}$ получим

$$\left.\begin{aligned} \tilde{U}_0^{(0)} &= kA_0^{(1)} - \beta_0 B_0^{(1)} \\ \tilde{W}_0^{(0)} &= \left[\alpha_0^2 A_0^{(1)} - k\beta_0 B_0^{(1)}\right]\xi \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Решив систему относительно $A_0^{(1)}$ и $\beta_0 B_0^{(1)}$, выразим их через $\tilde{U}_0^{(0)}$ и $\tilde{W}_0^{(0)}$. Из контактных условий (7) находятся выражения для постоянных $A_m^{(1)}$ и $B_m^{(1)}$ при $m = 1{,}2$ Затем они подставляются в граничные условия (6). Это позволяет получить уравнения симметричных колебаний трехслойной пластинки в следующем виде

$$\left.\begin{aligned} A_1\left[\frac{\partial}{\partial x} W_0^{(0)}\right] + B_1\left[U_0^{(0)}\right] &= S_1\left[f_x^{(1)}\right]; \\ A_2\left[W_0^{(0)}\right] + B_2\left[\frac{\partial}{\partial x} U_0^{(0)}\right] &= S_2\left[f_z^{(2)}\right], \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

где A_k, B_k, S_k –дифференциальные операторы одинаковой структуры, имеющие вид

$$D_k = D_{k1}\frac{\partial^4}{\partial t^4} + D_{k2}\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + D_{k3}\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \\ + D_{k4}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + D_{k5}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{k6}$$

D_{kj} равны A_{kj}, B_{kj} или S_{kj}:

$$\ldots, A_{26} = 1 - q_2, \ldots, B_{26} = -\xi(1 + q_2);$$

где $i = 1{,}2$; $z_1 = h_0 + h_1$; $z_2 = h_0 + h_2$; $q_m = 1 - \frac{\lambda_m}{\mu_m}$; a_m, b_m- соответственно скорости продольных и поперечных волн в материале пластинки.

Аналогично для трехслойной конической оболочки составим уравнение колебаний:

$$\left.\begin{aligned} C_1\left[W_0^{(0)}\right] + D_1\left[\frac{\partial}{\partial x} U_0^{(0)}\right] &= K_1\left[f_x^{(1)}\right]; \\ C_2\left[\frac{\partial}{\partial x} W_0^{(0)}\right] + D_2\left[U_0^{(0)}\right] &= K_2\left[f_z^{(2)}\right], \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Путем решения этой системы уравнений определяются напряженно-деформированные состояния в трехслойных пластинах и оболочках.

Мы сравниваем полученные результаты с работами других авторов, чтобы проверить их достоверность. Для этого полученную систему уравнений можно перенести на уравнения однослойной пластины и оболочки. В результате были получены уравнения, соответствующие уравнениям, выведенным по классической теории.

References:

1. Grigoluk, Je.I., & Selezov, I.T. (1973). *Neklassicheskie teorii kolebanij sterzhnej, plastin i obolochek*. Itogi nauki i tehniki. Ser. Mehanika deform. tverdyh tel, T. 5. (p.272). Moscow: VINITI.
2. Hudojnazarov, H. H. (2003). *Nestacionarnoe vzaimodejstvie cilindricheskih obolochek i sterzhnej s deformiruemoj sredoj*. (p.325). T. Izd-vo med.lit. imeni Abu Ali Ibn Sina.
3. Aleksandrov, A.Ja., & Kurshin, L.M. (1968). Trehslojnye plastinki i obolochki.Prochnost`, ustojchivost`, kolebanija. (pp.245-308). Moscow: Mashinostroenie, t.2.
4. Petrashen`, G.I. (1966). *Problemy inzhenernoj teorii kolebanij vyrozhdennyh sistem*. Iss-ja uprugosti i plastichnosti. (pp.3-33). L.: Izd-vo LGU, №5.
5. Petrashen`, G.I., & Hinen, Je.V. (1968). *Ob inzhenernyh uravnenijah kolebanij neideal`no-uprugih plastin*. Trudy MIAN. T. 95, (pp.151-183). L.: Nauka.
6. Filippov, I.G. (1986). Utochnenie differencial`nyh uravnenij kolebanija vjazkouprugih plastin i sterzhnej. *Prikl.meh*, 22, №2, pp. 71-78.
7. Mirzakobilov, N.H. (1992). *Kolebanija trehslojnyh plastin chastnogo vida*. Diss. na sois. uch. st. kand. nauk. (p.139). Moskva.
8. Filippov, I.G., & Cheban, V.G. (1988). *Matematicheskaja teorija kolebanij uprugih i vajazkouprugih plastin i sterzhnej*. (p.188). Kishinev: «Shtiinca».
9. Hudojnazarov, H.H., & Filippov, I.G. (1990). Utochnenie differencial`nyh uravnenij prodol`no - radial`nyh kolebanij krugovoj cilindricheskoj vjazkouprugoj obolochki. *Prikl. meh*, 26, №2, pp. 63 - 71.
10. Khudoynazarov, Kh., Abdirashidov, A., & Burkutboyev, Sh.M. (2016). Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody - *Mathematical Modeling and Computational Methods*, no.1, pp. 38-51.
11. Khudoynazarov, Kh.Kh., & Burkutboyev, Sh.M. (2017). Mathematical modelling of torsional vibrations of cylindrical shell taking into account of flowing fluid and rotation - *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no.4, pp. 31-47.
12. Petrashen`, G.I., & Hinen, Je.V. (1971). Ob uslovijah primenimosti inzhenernyh uravnenij neideal`no-uprugih plastin. *Voprosy dinamiki teorii rasprostranenija sejsmicheskoj volny*. № 11, Moscow: Nauka, pp. 48-56.