SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2023 **Issue:** 06 **Volume:** 122

Published: 15.06.2023 http://T-Science.org

Issue Article

Obid Abdullayevich Abdullayev
Samarkand State University
Assistant professor to Department of Theoretical and Applied Mechanics
xudoyberdiyevz@mail.ru

Nilufar Yusuf qizi Usmonova
Samarkand State University
Student

PROBLEMS IN THE THEORY OF VECTOR FIELDS

Abstract: *The basic concepts of vector analysis are outlined. Ostrogradsky-Gauss and Stokes formulas, methods of nabla-technique. Scalar field and its gradient. Vector field, divergence and vector field curl. Various forms of integral theorems. Several examples are given for calculation in vector analysis.*

Key words: *scalar fields, Laplace operator, Nable operator, vector argument, function vector, Maxwell equations.*

Language: *Russian*

Citation: Abdullayev, O. A., & Usmonova, N. Yu. (2023). Problems in the theory of vector fields. *ISJ Theoretical & Applied Science, 06 (122),* 214-217.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-06-122-33 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2023.06.122.33

Scopus ASCC: *2200.*

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Аннотация: *Излагаются основные понятия векторного анализа. Формулы Остроградского- Гаусса и Стокса, приёмы набла- техники. Скалярное поля и ее градиент. Векторное поле, дивергенция и ротор векторного поля. Различные формы интегральных теорем. Приводится несколько примеров для вычисления в векторном анализе.*

Ключевые слова: *скалярные поля, оператор Лапласа, оператором Набла, векторного аргумента, вектор функции, уравнений Максвелла.*

Введение

Векторный анализ в современной математике и механике имеет огромное значение. Если в математическом анализе мы столкнулись с функциями отображающие $R \to R$, и изучали вопросы теории последовательностей, теории пределов, дифференцирование и интегрирование соответствующих функций. Далее возникли задачи в скалярном и векторном полях, по этому возникло в разделе математики называемое векторным анализом. Следует отметить что при этом имеется ввиду обобщение математического анализа – это функциональный анализ. Такие операторы отображающие бесконечно-мерные пространство над R в поле R. Такие операторы принято называть – функционалами.

Нас интересует такие вопросы математики как:

1. Отображение $R \to \mho$ это вектор – функция скалярного аргумента;
2. Отображение $\mho \to R$, т.е. скалярные поля;
3. Отображение $\mho \to \mho$, т.е. векторные поля;

Приведем некоторые определения.

1. Вектор – функцией скалярного аргумента называется функция, область определения которой содержится в R, а область допустимых значений в n – мерном линейном пространстве.

По другому это определение выглядит так:

Пусть дано n- мерное линейное пространство $\mho, \mathcal{D}$ – некоторое числовое множество, где $\mathcal{D} \subseteq R$. Тогда вектор функций называется функция каждому числу, из множества $\mathcal{D}$ сопоставляющая соответствующий вектор из $\mho$.

Понятия придела, непрерывности и произведений вектор-функций вводится как обычно функции.

Например для обычной функции φ имеем $\lim\limits_{x\to\alpha}\varphi(x)=A \Leftrightarrow \forall \mathcal{E}>0, \exists\delta>0, \forall\times(0<$
$|x-a|<\delta \Rightarrow |\varphi(x)-A|<\varepsilon)$.

Для вектор функций $\vec{f}$ единственное отличие в формуле будет состоять в том, что модуль разности векторов определяется иначе, чем модуль разности чисел.

$$\lim_{x\to\alpha}\vec{f}(t)=\vec{A} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,$$

$$\exists\delta>0, \forall t\left(0<|t-a|<\delta \Rightarrow \left\|\vec{f}(t)-\vec{A}\right\|<\varepsilon\right)$$

Понятие производной вектор функции идентично традиционному определению производной.

$$\vec{f}'(t)=\lim_{\Delta t\to v}\frac{1}{\Delta t}\left(\vec{f}(t+\Delta t)-\vec{f}(t)\right)$$

т.е. $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall\Delta t$

$$\left(|\Delta t|<\varepsilon \Rightarrow \left\|\tfrac{1}{\Delta t}(\vec{f}(t+\Delta t)-\vec{f}(t)-\vec{f}'(t)\right\|<\varepsilon\right).$$

Скалярным полем на $\mathcal{D}\in R''$ называется любая функция $f:\mathcal{D}\to R$, т.е. функция, каждому вектору из $\mathcal{D}$ ставящая в соответствие действительное число и в этом случае понятие придела вводится обычным путем:

$$\lim_{\vec{\tau}\to\vec{\tau}_0}\varphi(\vec{\tau})=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0,$$

$$\forall\vec{\tau}\;(0<||\vec{\tau}-\vec{\tau}_0||<\delta \Rightarrow |\varphi(\vec{\tau})-A|<\varepsilon).$$

Понятие производной скалярной функции векторного аргумента не может вводится как обычно. Дело в том что в знаменателе окажется вектор. По этому понятие производной вводится с помощью понятие производной по направлению и с помощью градиента скалярной функции векторного аргумента.

Скалярные поля определим с помощью функции $\mho(x,y,z)=U(\vec{\tau})$

Векторные поля определим с помощью вектор функции $\vec{F}(x,y,z)=F_x\cdot\vec{\imath}+F_y\cdot\vec{\jmath}+F_z\cdot\vec{k}$. В теории поля используется дифференциальные операторы дифференцирования по времени $\left(\dot{B}=\frac{\partial B}{\partial t}\right)$ и по координатам оператор дифференцирования по пространственным координатам $\vec{\nabla}$ - оператор Гамильтона: $\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{\imath}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{\jmath}+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{k}$ тогда применив оператора $\vec{\nabla}$ к скалярному и векторному полю, можно получить скалярные и векторные величины.

$$\vec{\nabla}\cdot U=grad\,U=\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\vec{\imath}+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\vec{\jmath}+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=div\,\vec{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial k}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial F_x}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial x}\right)\cdot\vec{\imath}+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\cdot\vec{\jmath}+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\cdot\vec{k}$$

дифференциальные операторы второго порядка $\vec{\nabla}^2=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Приведем основные математические тождества теории поля:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)=grad\left(div\vec{F}\right),$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)=rot\left(rot\,\vec{F}\right),$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot U\right)=rot(grad\,U),$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)=div\left(rot\,\vec{F}\right),$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)=\vec{\nabla}\cdot\vec{F}+\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right);$$

Операторы векторного анализа эффективно используется при описании электромагнитных процессов приведем полную систему уравнений Максвелла. Полный анализ макроскопических электромагнитных процессов возможен на основе полной системы основных уравнений электродинамики, к числу которых относятся – уравнения Максвелла:

$$rot\,\vec{H}=-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{\jmath}^{\,0},$$

$$rot\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$div\,\vec{D}=\varrho^9,$$

$$div\,\vec{B}=0.$$

Система уравнений состояний (материальные уравнения)

$$\vec{D}=\mathcal{E}_q\cdot\vec{E},\ \vec{B}=\mu_q\cdot\vec{H},\quad \vec{\jmath}=\sigma\cdot\vec{E}.$$

В некоторых случаях уравнения Максвелла удобно применять в интегральной форме

$$\oint_L \vec{H}d\vec{e}=\int_S\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{\jmath}^{\,\mathrm{Э}}\right)\cdot d\vec{S},\quad \oint_L \vec{E}d\vec{e}=-\frac{d}{d\,t}\int_S \vec{B}\,d\,\vec{S}.$$

$$\oint_L \vec{H}d\vec{s}=\int_S(\varsigma^{\mathrm{Э}}dv),\quad \oint_L \vec{B}d\vec{s}=0.$$

Выражение вектора $grad\,T$ в произвольных ортогональных координатах ξ_1,ξ_2,ξ_3 и, в частности, в декартовых координатах x,y,z в которых $h_x=h_y=h_z=1$;

$$grad\,T=\frac{\vec{\imath}_1}{h_1}\frac{\partial T}{\partial\xi_1}+\frac{\vec{\imath}_2}{h_2}\frac{\partial T}{\partial\xi_2}+\frac{\vec{\imath}_3}{h_3}\frac{\partial T}{\partial\xi_3};$$

$$grad\,T=\vec{\imath}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}+\vec{\jmath}\cdot\frac{\partial T}{\partial y}+\vec{k}\cdot\frac{\partial T}{\partial z};$$

Для записи пространственных производных часто бывает удобно воспользоваться оператором Гамильтона (оператором Набла) $\vec{\nabla}$. В декартовых координатах $\vec{\nabla}=\vec{\imath}\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\vec{\jmath}\cdot\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}$ тогда $grad\,T=\vec{\nabla}T$. В сферической системе координат R,θ,φ производная

$$grad\,T=\vec{\imath}_R\cdot\frac{\partial T}{\partial R}+\frac{\vec{\imath}_\theta}{R}\cdot\frac{\partial T}{\partial\theta}+\frac{\vec{\imath}_\varphi}{R\cdot\sin\theta}\cdot\frac{\partial T}{\partial\varphi}.$$

Постановка задачи и метод решения.

1. В декартовой системе координат доказать, что скалярное произведение $\left(\vec{\nabla}\vec{M}\right)=div\,\vec{M}$.
   Решение. Так как $\vec{\nabla}=\vec{\imath}\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\vec{\jmath}\cdot\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}$, $\vec{M}=\vec{\imath}\cdot M_x+\vec{\jmath}\cdot M_y+\vec{k}\cdot M_z$. Тогда

$$\vec{\nabla}\vec{M} = \left(\left\{\vec{\imath}\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\vec{\jmath}\cdot\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right\}\left\{\vec{\imath}\cdot M_x+\vec{\jmath}\cdot M_y+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\vec{k}\cdot M_z\right\}\right) = \frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_z}{\partial z} = div\,\vec{M}$$

2. В декартовой системе координат доказать, что $[\vec{\nabla}\,\vec{M}] = rot\,\vec{M}$. Решения, что
$$[\vec{\nabla}\,\vec{M}] = \vec{\imath}\cdot\left(\frac{\partial M_z}{\partial y}-\frac{\partial M_y}{\partial z}\right)+\vec{\jmath}\cdot\left(\frac{\partial M_x}{\partial z}-\frac{\partial M_z}{\partial x}\right)+$$
$$+\vec{k}\cdot\left(\frac{\partial M_y}{\partial x}-\frac{\partial M_x}{\partial y}\right) = rot\,\vec{M}$$
3. Получить выражения для пространственных производственных а) $div\,grad\,T$, б) $rot\,grad\,T$ поля T в декартовой системе координат x, y, z .

Решения.

а) $div\,grad\,T = (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\,T) = \left(\left\{\vec{\imath}\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\vec{\jmath}\cdot\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right\}\cdot\left\{\vec{\imath}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}+\vec{\jmath}\cdot\frac{\partial T}{\partial y}+\vec{k}\cdot\frac{\partial T}{\partial z}\right\}\right) =$
$$= \left\{\vec{\imath}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\vec{\jmath}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\vec{k}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right\} = \nabla^2 T$$
$$div\,grad\,T = (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\,T) = \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$
∇^2 – оператор Лапласа. В декартовых координатах $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

б) $ratgrad\,T = [\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\,T] = \left[\left\{\vec{\imath}\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\vec{\jmath}\cdot\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right\}\cdot\left\{\vec{\imath}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}+\vec{\jmath}\cdot\frac{\partial T}{\partial y}+\vec{k}\cdot\frac{\partial T}{\partial z}\right\}\right] = 0.$

Таким образом: $rotgrad\,T = 0$.

Приведем несколько формул для вторых производных векторного поля $\vec{M}$

а) $\vec{\nabla}^2\cdot\vec{M} = (\nabla^2 M_x,\ \nabla^2 M_y,\ \nabla^2 M_z)$

б) $div\,rot\,\vec{M} = 0$

в) $grad\,div\,\vec{M} = rot\,\vec{M} = \vec{\nabla}^2\cdot\vec{M}$.

Принимая во внимание то, что $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ получим $\theta = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}++\frac{\partial w}{\partial z} = div\,\vec{U}$ то есть дивергенция поля перемещений $\vec{U}$ ровна относительным изменениям θ объемов dv элементов упругой среды при деформациях. Производная $rot\,\vec{U} = 2\vec{\omega}$ характеризует повороты элементов dv упругой среды, а производная $div\,\vec{U} = \theta$ - изменение объемов dv.

В общем случае, поля смешанный, теории Гельмгольца:
$$\vec{U} = \vec{U}_P+\vec{U}_S = grad\,\Phi+rot\,\vec{\Psi}$$
$\vec{U}_P$ - потенциальная составляющая поле смещений $\vec{U}$,

$\vec{U}_S$ - соленоидальная составляющая поле смещений $\vec{U}$

Уравнение Ламе или уравнение передачи колебаний в абсолютно – упругой среде:
$$(\mu+\partial)grad\,\theta+\mu\nabla^2\vec{U}+\varsigma\cdot\vec{F} = \sigma\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}$$
где $\theta = div\,\vec{U}$.

Если $\vec{F} = 0$, получим уравнение Ламе для свободных колебаний
$$(\mu+\partial)grad\,\theta+\mu\nabla^2\vec{U} = \varsigma\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}$$
Учитывая что

$\nabla^2\vec{U} = grad\,div\,\vec{U}-rot\,rot\vec{U}$ последнее уравнение представим в виде:

$(\mu+\partial)grad\,\theta+\mu\,grad\,div\,\vec{U}-\mu rot\,rot\,\vec{U} = \sigma\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}$ так как $div\,\vec{U} = \theta, rot\,\vec{U} = 2\vec{\omega}$, получим
$$(\lambda+2\mu)grad\,\theta-2\mu\,rot\,\vec{\omega} = \rho\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}$$
при однородной по параметрам λ, μ, ς среде $\vec{\nabla}\gamma = 0$, $\vec{\nabla}\mu = 0$,

$\vec{\nabla}\rho = 0$ из последнего уравнения получим

$(\lambda+2\mu)\,div\,grad\,\theta-2\mu\,div\,rot\,\vec{\omega} = \rho\frac{\partial^2 div\vec{U}}{\partial t^2}$

принимая во внимание $div\,grad\,\theta = \nabla^2\theta$, $div\,rot\,\vec{\omega} = \theta$, $div\,\vec{U} = 0$ получим: $(\lambda+2\mu)\nabla^2\theta = \rho\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}$ или $\nabla^2\theta = \frac{1}{v_P^2}\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}$, где $v_p = \sqrt{\frac{(\lambda+2\mu)}{\varrho}}$

Таким образом, для дилатации $\theta = div\,\vec{U}_P$ получили волновое уравнение.

Выводы.

В заключении отметим тот факт, что векторный анализ имеет огромное приложение. Теория поля представляет собой дифференциальное и интегральное исчисления функций векторного аргумента. Поэтому раздел математики называется векторным анализом.

В физике результаты этой теории используются в электродинамике, гидродинамике и аэродинамике, термодинамике, механике деформируемого твёрдого тела, вибромеханике, механике плазмы, диффузионной механике смесей, теории относительности и т.д..

References:

1. Nikol`skij, S.M. (2000). *Kurs matematicheskogo analiza*. 5-e izd, M.
2. Kogin, N.E. (1965). *Vektornoe ischislenie i nachalo tenzornogo ischislenija*, 9 - e izd..
3. Krasnov, M.L. (2003). *Vektornyj analiz: zadachi i uprazhnenija.* (p.100). M.: Jeditorijal URES.
4. Min`kova, R.M. (2013). *Vektornyj analiz: uchebnoe posobie.* (p.69). Ekaterinburg GOU VPO URFU.
5. Krasnov, M.L., & Kiselev, A.I. (2011). *Vektornyj analiz*. (p.144). Izd. URSS.
6. Aminova, A.V. (2020). *Sbornik zadach i uprazhnenij po vektornomu i tenzornomu analizu*. (p.63). Kazan`: Izd-vo Kazan. un-ta.
7. Abrashina-Zhadalva, N.G., & Timoshenko, I.A. (2016). *Osnovy vektornogo i tenzornogo analiza*, Minsk: BGU.
8. Aupova, N.B. (2012). *Lekcii po vektornomu i tenzornomu analizu.* Uchebnoe posobie - NGU. (p.94). Novosibirsk.
9. Zubrina, L.G., & Ponikarova, N.Jy. (2008). *Jelementy vektornogo analiza v zadachah i uprazhnenijah*. (p.52). Samara : Samar. gos. ajero-kosm. un-t.
10. Keda, O.A., et al. (2014). Matematika. Chast` 8. *Teorija polja.* Uchebnoe posobie. (p.112). Ekaterinburg. Izd - vo Ural. un-ta.