Impact Factor:

ISRA (India)	= **6.317**	**SIS** (USA)	= **0.912**	**ICV** (Poland)	= **6.630**
ISI (Dubai, UAE)	= **1.582**	**РИНЦ** (Russia)	= **3.939**	**PIF** (India)	= **1.940**
GIF (Australia)	= **0.564**	**ESJI** (KZ)	= **8.771**	**IBI** (India)	= **4.260**
JIF	= **1.500**	**SJIF** (Morocco)	= **7.184**	**OAJI** (USA)	= **0.350**

SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal

Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2023 **Issue:** 12 **Volume:** 128

Published: 25.12.2023 **http://T-Science.org**

Issue **Article**

K.S. Tattibekov
Almaty University of Technology
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor
Almaty c., Republic of Kazakhstan

MULTICOMPONENT GENERALIZATIONS OF THE MA SYSTEM OF EQUATIONS

***Abstract**: Integrable generalizations of the Landau-Lifschitz equations were constructed as σ- models of soliton equations.To construct such a model of equations, the ideas of gauge equivalence are usually used. In this paper, using this methodology, multicomponent generalizations of the system of Maxwell's equations are constructed.*

***Key words**: integrable generalizations, gauge equivalence, sigma models, zero curvature, redefined system, Lax representation, integrals of motion, soliton solutions.*

***Language**: Russian*

***Citation**: Tattibekov, K. S. (2023). Multicomponent generalizations of the MA system of equations. *ISJ Theoretical & Applied Science, 12 (128)*, 301-303.

***Soi**: http://s-o-i.org/1.1/TAS-12-128-32 ***Doi**: https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2023.12.128.32

***Scopus ASCC**: 2611.*

МНОГОКОМПОНЕНТНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МА

***Аннотация**: Интегрируемые обобщения уравнений Ландау-Лифщица были построены как σ - модели солитонных уравнений. Для построения такой модели уравнений обычно пользуются идеями калибровочной эквивалентности. В данной работе используя эту методологию, построены многокомпонентные обобщения системы уравнений Ма.*

***Ключевые слова**: интегрируемые обобщения, калибровочная эквивалентность, сигма модели, нулевая кривизна, переопределенная система, представление Лакса, интегралы движения, солитонные решения*

Введение

В теории солитонов важную роль играет понятие σ - модели связанные с нелинейными дифференциальными уравнениями [3,5]. Они полезны как при классификации уравнений, так и при самостоятельном ее применении для описания физических процессов. Ряд интегрируемые обобщения уравнений ЛЛ были построены как σ - модели солитонных уравнений [1,2]. Для построения σ - модели уравнений обычно пользуются идеями калибровочной эквивалентности.

Рассмотрим систему нелинейных уравнений Ма [4]:

$$i\varphi_t + 2\,\varphi_{xx} - 2\,u\varphi = 0, \qquad (1a)$$

$$u_t + \left(|\varphi|^2\right)_x = 0, \qquad (16)$$

известная как уравнения резонансного взаимодействия короткой и длинной волн. Она интегрируется с помощью МОЗР, посредством линейной переопределенной системы

$$\begin{aligned} \Psi_x &= U(x,t,\lambda)\,\Psi \\ \Psi_t &= V(x,t,\lambda)\,\Psi \end{aligned} \qquad (2)$$

где $U = i\lambda C_1 + C_0$, $V = 2i\lambda^2 C_1^2 + \lambda D_1 + D_0$, $3\times 3-$ матрицы.

$C_0,\ C_1,\ D_0,\ D_1$ - соответственно имеют вид:

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\varphi}/2 & i\varphi \\ 0 & 0 & \varphi/2 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & -i\bar{\varphi}_x & -i|\varphi|^2/2 \\ -\varphi & 0 & i\varphi_x \\ 0 & -\bar{\varphi} & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Основная часть

Пусть

$\varphi^N = (\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_N^*)^*$,

где $*$ - означает для матрицы операцию эрмитового сопряжения, O_N - матрица состоящая из нулей, размерностью $N \times N$.

Положим

$$U = i\lambda C_1^N + C_0^N, \qquad (3а)$$

$$V = 2i\lambda^2 (C_1^N)^2 + \lambda D_1^N + D_0^N, \qquad (3б)$$

где

$$C_0^N = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_1^*/2 & \cdots & \varphi_N^*/2 & iu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_1/2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_N/2 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1^N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & -i\varphi_{1x}^* & \cdots & -i\varphi_{Nx}^* & \varphi^*\varphi/2 \\ -\varphi_1 & 0 & \cdots & 0 & i\varphi_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\varphi_N & 0 & \cdots & 0 & i\varphi_N \\ -i & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_1^* & \cdots & \varphi_N^* & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\varphi_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\varphi_N \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi^{N^*}\varphi^N = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k \varphi_k^*.$$

Уравнение нулевой кривизны для матриц (3) приведет к следующей системе, являющейся N - компонентным обобщением системы (1):

$$i\varphi_t^N + 2\varphi_{xx}^N - 2u\boldsymbol{\varphi}^N = 0, \qquad (1'а)$$

$$u_t + (\varphi^{N^*}\varphi^N)_x = 0, \qquad (1'а)$$

где φ^N - вектор столбец, u - искомые функции.

Модель калибровочно эквивалентной к системе Ма

Рассмотрим решение переопределенной системы (2)

$$\psi^N(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{\lambda}),$$

где

$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ - решение этой же системы при $\lambda = 0$, т.е.

$$\boldsymbol{g}_x = \boldsymbol{C}_0^N \boldsymbol{g}, \qquad \boldsymbol{g}_t = \boldsymbol{D}_0^N \boldsymbol{g}.$$

При этом матрица $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{\lambda})$ является решением системы

$$G_x(x, t, \lambda) = U' G(x, t, \lambda), \qquad (4а)$$

$$G_t(x, t, \lambda) = V' G(x, t, \lambda), \qquad (4б)$$

где

$$U' = -g^{-1}g_x + g^{-}Ug = i\lambda g^{-1}C_1^N g, \qquad (5а)$$

$$V' = -g^{-1}g_t + g^{-1}Vg = \lambda g^{-1}D_1^N g + +2i\lambda^2 g^{-1}(C_1^N)^2 g. \qquad (5б)$$

Введем матрицу

$$R = g^{-1}C_1^N g,$$

тогда нетрудно заметить, что

$$g^{-1}(C_1^N)^2 g = R^2,$$

причем

$$R^3 = R. \qquad (6)$$

Выразим выражение $g^{-1}D_1^N g$ через R:

$$R_x = g^{-1}\left[C_1^N, C_0^N\right]g,$$

$$\boldsymbol{2}\left\{\left[\boldsymbol{C}_1^N, \boldsymbol{C}_0^N\right], \boldsymbol{C}_1^N\right\} = \boldsymbol{D}_1^N,$$

тогда,

$$g^{-1}\boldsymbol{D}_1^N\boldsymbol{g} = \boldsymbol{2}\left\{\left[\boldsymbol{C}_1^N, \boldsymbol{C}_0^N\right], \boldsymbol{C}_1^N\right\}\boldsymbol{g} = 2(RR_x + R_x R).$$

Условия совместимости линейной системы (4):

$$U'_t - V'_x + [U', V'] = 0$$

приведет к следующему выражению

$$i(g^{-1}\boldsymbol{C}_1^N g_t) - 2\,(g^{-1}(\boldsymbol{C}_1^N)^2 g_{xx}) = 0,$$

или в терминах матрицы R, имеем

$$iR_t = 2(R^2)_{xx} \qquad (7)$$

Это и есть искомая σ - модель системы (1'). Уравнение (7) с учетом условия (6) интегрируется посредством МОЗР при помощи линейной системы (4). Представление Лакса для него имеет вид

$$U^{'} = -g^{-1}g_x + g^{-}Ug = i\lambda g^{-1}C_1^N g,$$
$$V^{'} = -2i\lambda^2 R^2 + 2\lambda\,(R^2)_x$$

Оно, как интегрируемое уравнение обладает бесконечным множеством интегралов движения, N - солитонными решениями и т.д.

Система уравнений Ма (1') обладает следующими первыми интегралами движения, соответствующие нулевым граничным условиям на x = $\pm\infty$:

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi^{N^*}\varphi^N)\,dx, J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,dx.$$

Выразим плотности этих интегралов движения в терминах R. Из вышеустановленных соотношении имеем

$$R_x = g^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \varphi^{N^*}/2 & 2iu \\ 0 & 0_N & \varphi^N/2 \\ 2i & 0 & 0 \end{pmatrix} g,$$

$$R_x^2 = g^{-1}\begin{pmatrix} -4u & 0 & \varphi^{N^*}\varphi^N/4 \\ i\varphi^N & 0_N & 0 \\ 0 & i\varphi^{N^*} & -4u \end{pmatrix} g$$

откуда получаем, что

$$det(R_x) = \frac{i}{2}\varphi^{N^*}\varphi^N,$$
$$tr(R_x)^2 = -8u. \qquad (8)$$

Так как правые части равенств (8) являются плотностями интегралов движения, то левая часть также является плотностями интегралов движения в терминах элементов матрицы R (3а). Таким образом, первые два интеграла сохранения для уравнения (7) имеет вид

$$\mathbf{J_1^R} = \int_{-\infty}^{\infty} (det\,R_x)dx, \quad \mathbf{J_2^R} = \int_{-\infty}^{\infty} tr(\mathbf{R_x})dx.$$

References:

1. Kundu, A. (1984). Landau-Lifshitz and hidh-order nonlinear systems gauge generated from nonlinear Schrodinger type equations. *J.Math. Phys.*, 1984, v.25, №12, pp.3433-3438.
2. Makhankov, V.G., Kundu, A., & Pashaev, O.K. (n.d.). *On gauge equivalence of Landau-Lifshitz and nonlinear Schrodinger equations.* Preprint JINR, E17-82-601, Dubna. -8 p.
3. Orfanidis, S.J. (1980). σ - models of nonlinear evolution equations. *Phys. Rev.*, 1980, v.21D, p.1513.
4. Ma, Y.C. (1988). On the Long-wave/short-wave resonant interaction. *Stud.Appl. Math.*, 1988, v.59, pp.201-221.
5. Tattibekov, K.S. (2002). *σ - model sistemy uravneni Ma.* Materialy nauchno-prakticheskoi konferensii. (pp.58-62). KazNU im. Al-Farabi, 2002, pp.58-62.