Impact Factor:

ISRA (India)	= 6.317	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
ISI (Dubai, UAE)	= 1.582	РИНЦ (Russia)	= 3.939	PIF (India)	= 1.940
GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.771	IBI (India)	= 4.260
JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 7.184	OAJI (USA)	= 0.350

SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2024 **Issue:** 01 **Volume:** 129

Published: 24.01.2024 **http://T-Science.org**

Issue Article

Nurali Davlyatovich Boltaev
Angren University
PhD,
Department of Economics and Finance
Tashkent, Uzbekistan

OPTIMAL QUADRATURE FORMULA FOR APPROXIMATE CALCULATION OF INTEGRALS OF STRONGLY OSCILLATING FUNCTIONS IN K_2 SPACE (P_m)

Abstract: *It is known that in mathematics operations occur in pairs. Including addition and subtraction, multiplication and division, exponentiation and root extraction, etc. A natural question arises whether there is an inverse operation for finding the derivative of a function or an operation of differentiation.*

Key words: *mathematical operations, root extraction, quadrature formula, integral calculations.*
Language: *Russian*
Citation: Boltaev, N. D. (2024). Optimal quadrature formula for approximate calculation of integrals of strongly oscillating functions in K_2 space (P_m). *ISJ Theoretical & Applied Science, 01 (129),* 309-312.
Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-01-129-31 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2024.01.129.31
Scopus ASCC: *1202.*

ОПТИМАЛЬНАЯ КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ОТ СИЛЬНО ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ K_2 (P_m)

Аннотация: *Известно, что в математике операции встречаются парами. Включая сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в степень и извлечение корня и т. д. Возникает естественный вопрос, существует ли обратная операция нахождения производной функции или операция дифференцирования.*

Ключевые слова: *математические операции, извлечение корня, квадратурная формула, вычисления интегралов.*

Введение

Термин квадратура восходит к древнегреческой цивилизации. А именно, античными математиками был поставлен вопрос о квадратуре круга (т.е. вопрос о возможности построения с помощью линейки и циркуля квадрата, равновеликого кругу по площади). А вычисление площадей, как известно, равносильно интегрированию подходящих функций. Простейшие квадратурные формулы для вычисления интегралов создавались и использовались уже во времена Ньютона и Лейбница, формула Ньютона, изложенная в его письме Лейбницу (1676) и опубликованная Котесом. Прием, лежащий в основе всех классических квадратурных формул, состоит в замене подинтегральной функции некоторым ее приближением (например, интерполяционным полиномом или сплайном).

Говорят, что квадратура точна на алгебраических полиномах степени m (точна на P_m), если $I(f) = S_n(f)$ ($R_n(f) = 0$) для всех $f \in P_m$. Алгебраической степенью точностью квадратурной формулы называется максимальная степень многочленов, на которых она точна.

Важным свойством квадратурных формул является их устойчивость по отношению к ошибкам вычисления подынтегральной функции. В практических вычислениях значений функции неизбежно возникают ошибки. В результате, вместо $f(x_k)$ получаем значения $f_e(x_k) = f(x_k) + \varepsilon_k$, и, соответственно, вместо $S_n(f)$ значение $Se_n(f) = S_n(f) + \sum n_i = 1\ \omega_i \varepsilon_i$.

Найти начало координат данной функции гораздо сложнее, чем дифференцировать данную функцию. В дифференциальном исчислении мы научились находить производную основных элементарных функций, сложения, умножения, деления и комплексных функций. Эти правила позволяли находить производную любой элементарной функции. При интегрировании элементарных функций нет общих правил, как при дифференцировании. Например, несмотря на то, что известны начала двух элементарных функций, не существует четкого правила нахождения начала их умножения и деления.

При интегрировании необходимо использовать отдельные подходящие для этого методы в зависимости от конкретного представления выражения под интегралом. Иными словами, в интеграции необходимо мыслить гораздо шире. Интегрирование функции, т.е. методы нахождения исходной функции, показывают ряд таких методов, с помощью которых цель достигается в большинстве случаев.

Чтобы достичь цели в интегрировании, необходимо запомнить следующую таблицу основных интегралов:

$$1)\ \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ \ n \neq -1;\quad 2)\ \int dx = x + C;\quad 3)\ \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$$

$$4) \int \sin x dx = -\cos x + C;\quad 5)\ \int \cos x dx = \sin x + C;\quad 6) \int e^x dx = e^x + C;$$

$$7) \int\ a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1);\quad 8)\ \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C;$$

$$9) \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;\quad 10) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C;$$

$$11)\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C;\quad 12)\ \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C,\ \ a \neq 0;$$

$$13)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - k}} = \ln x + \sqrt{x^2 - k} + C.$$

Классические модели приближенного вычисления определенного интеграла основаны на построении интегральных сумм [1. с 63]. Эти суммы должны быть как можно короче, но вызывать достаточно небольшие ошибки в расчетах. Зачем? С момента появления серьезных и хороших компьютеров острота проблемы сокращения количества вычислительных операций с некоторого времени возвращается. Конечно, их не следует сбрасывать со счетов сразу, но существует явный компромисс между простотой алгоритма (где много вычислительных операций) и, точнее, сложностью.

Рассмотрим задачу вычисления определенных интегралов методом Монте-Карло. Программа стала возможной после появления первых компьютеров, поэтому ее отцами считаются американцы Нейман и Улам (отсюда и броское название, ведь в то время лучшим генератором случайных чисел была игровая рулетка).

Многие вопросы науки и техники сводятся к интегральным и дифференциальным уравнениям или их системам. Во многих случаях для решения таких уравнений необходимо вычислить точный интеграл. Но только очень немногие формы интегралов могут быть вычислены точно [2. с 48]. Разработка методов приближенного вычисления таких интегралов с высокой точностью является одной из актуальных задач вычислительной математики. Универсальным методом приближенного вычисления интегралов является использование квадратурных и кубатурных формул.

Если в определенных и неопределенных интегралах найти начальную функцию затруднительно или исходная функция не выражается элементарными функциями, то для вычисления таких интегралов используют ряды.

Основная идея вычисления интегралов с помощью степенных рядов состоит в том, что функция под интегралом заменяется соответствующим степенным рядом.

При замене функции под интегралом градуированным рядом необходимо обращать внимание на требуемую точность. Основываясь на опыте, можно сказать, что во многих случаях для достижения точности достаточно взять первые четыре члена разложения 0,001. Но чем больше членов мы возьмем при разложении в ряд, тем выше будет точность [4. с 122].

После того, как мы заменили функцию под интегралом на соответствующий градуированный ряд, следующим шагом будет упрощение членов сформированного ряда. Цель упрощения - избежать ошибок и тонких вычислений на следующем шаге, то есть при вычислении точный интеграл.

Более сложные задачи, связанные с расчетом поверхности, решаются на основе свойства аддитивности поверхности. В этом случае плоская форма разбивается на непересекающиеся части, и по свойству 4^0 определенного интеграла поверхность плоской формы равна сумме поверхностей частей.

Известно, что понятие функции является одним из основных понятий математического анализа. Соответственно, при изучении (проверке) функций, если предположить, что их классификация осуществляется по важным свойствам функций, эта работа позволяет глубже изучить функции и, более того, в ряде случаев сокращает время, затрачиваемое на проверку функции [5. с 77]. Эту ситуацию мы можем наблюдать в классе четных и нечетных функций, которые образуют важный класс функций. Важным условием для функций, входящих в этот класс, является, во-первых, симметричность области определения функции относительно начала координат, а вторым условием является связь между значениями функции при симметричные точки, полученные из области определения. Теперь вспомним «геометрические» и «аналитические» определения четных и нечетных функций.

Основная цель выделения четного и нечетного класса функций состоит в том, чтобы при проверке функций, входящих в этот класс, было достаточно исследовать их не во всех точках области обнаружения, а, например, в части, состоящей из положительных чисел. Свойства функции в остальных точках легко определить, используя свойства изучаемой части на основе геометрического определения четных и нечетных функций.

Задача построения оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления определенных интегралов является одным из важних задач вычислительной математики. Эта задача исследована многими математиками и имеются несколько методов построения оптимальных квадратурных формул. Один из таких методов является метод предложенный С.Л. Соболевым, который основывается на построения дискретного аналога некоторого дифференциального оператора.

References:

1. Faddeev, I.S. (1972). *Sominskij sbornik zadach po vysshej alebre*, Moskva: «Nauka».
2. Abdalimov B. (1994). Vysshaja matematika,Tashkent: Uchitel`.
3. Abdalimov, B., et al. (1985). *Reshenie zadach po vysshej matematike napravljajte dal`she*,Tashkent: Uchitel`.
4. Abdalimov, B., & Salihov, Sh. (1983). *Kratkij kurs vysshej matematiki*. Tashkent: Uchitel`.
5. Fajzmamadova, L.G. (2012). *Ob odnoj optimal`noj kvadraturnoj formule dlja vychislenija krivolinejnogo integrala pervogo roda.* «Sovremennye problemy matematicheskogo analiza i teorii funkcij» - Materialy mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii, posvjashhennoj 60-letiu akademika AN Respubliki Tadzhikistan M.Sh.Shabozova (Dushanbe, 29-30 iunja 2012 g.).
6. Slobodskaja, V.A. (1969). *Kratki kursa matematika Visshej*. Moskva: Vysshaja shkola.
7. Mirpochchoev, F.M. (2012). K voprosu ob ocenkah kvadraturnyh formul dlja priblizhennogo vychislenija krivolinejnyh integralov pervogo roda na nekotoryh klassah krivyh, zadavaemyh moduljami nepreryvnosti. *DAN RT*. 2012. T.55, №6.
8. Sangmamadov, D.S. (2011). K voprosu ob ocenkah kvadraturnyh formul dlja priblizhennogo vychislenija krivolinejnyh integralov pervogo roda nekotoryh klassov funkcii. *Izv. AN RT*. Otd. fiz-mat., him., geol. i tehn. n. 2011, №3(144).
9. Abozov, M.Sh., & Fajzmamadova, L.G. (2012). Nailuchshaja formula chislennogo integrirovanija krivolinejnogo integrala pervogo roda dlja nekotoryh klassov funkcij i krivyh. *Izv.*

AN RT. Otd. fiz.-mat., him., geol. i tehn. n. 2012. №2(147).

10. Parvonaeva, Z.A. (2008). Optimizacija vesovyh kvadraturnyh formul dlja klassov funkcij maloj gladkosti. *DAN RT*. 2008. T.51, №2.