Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500
SIS (USA) = 0.912
РИНЦ (Russia) = 3.939
ESJI (KZ) = 8.771
SJIF (Morocco) = 7.184
ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2024 **Issue:** 02 **Volume:** 130

Published: 05.02.2024 **http://T-Science.org**

Issue Article

Gennady Evgenievich Markelov
Bauman Moscow State Technical University
Candidate of Engineering Sciences, associate professor,
Academician of International Academy of Theoretical and Applied Sciences,
Moscow, Russia
markelov@bmstu.ru

ASPECTS OF TEACHING MATHEMATICAL MODELING

Abstract*: This paper describes some particular aspects associated with teaching of mathematical modeling. Taking into account these aspects allows improving the quality of graduates training and increasing their competitiveness.*

Key words*: education, mathematical model, mathematical modeling, principled approach, teaching.*
Language*: Russian*
Citation: Markelov, G. E. (2024). Aspects of teaching mathematical modeling. *ISJ Theoretical & Applied Science, 02 (130)*, 17-25.
Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-02-130-3 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2024.02.130.3
Scopus ASCC*: 3304.*

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Аннотация*: В статье изложены некоторые особенности, связанные с преподаванием математического моделирования. Учет таких особенностей позволяет улучшить качество подготовки выпускников, повысить их конкурентоспособность.*

Ключевые слова*: образование, математическая модель, математическое моделирование, принципиальный подход, обучение.*

Введение

Математическое моделирование как способ исследования и получения новых знаний применяют в различных областях человеческой деятельности. Многие научные публикации показывают возможности, которые открывает математическое моделирование. В настоящее время возрастает роль междисциплинарных исследований, формируются новые научные направления, успешно использующие междисциплинарный подход. В связи с этим заслуживают внимания работы (см., например, [1–5]), которые демонстрируют возможности математического моделирования при решении профессиональных задач, возникающих на стыке нескольких академических дисциплин.

Возникновение новых фундаментальных и прикладных задач приводит к необходимости дальнейшего активного использования математического моделирования. Это обусловлено многими причинами, среди которых: усложнение и сокращение сроков исследований, рост финансовых, энергетических и других затрат на обслуживание экспериментов, необходимость решения экологических, социальных и других сопутствующих исследованию проблем.

Математическое моделирование активно используют в современной системе образования. Проблемы, связанные с преподаванием элементов математического моделирования, широко обсуждаются в современной научной литературе, при этом рассматриваются разные точки зрения (см., например, [6–11]). Многие ученые считают, что изучение математического моделирования повышает математическую грамотность обучающихся, развивает их познавательные способности, создает лучшую мотивацию учения, укрепляет междисциплинарные связи (см., например, [12–15]).

В этой связи становится важным преподавание математического моделирования, направленное на изучение современных методов построения математических моделей, способов качественного и количественного анализа математических моделей, методик, позволяющих рационально использовать возможности математического моделирования.

Целью настоящей работы является изложение некоторых теоретических и методологических особенностей преподавания математического моделирования, которые создают предпосылки для рационального использования возможностей математического моделирования. В рамках данной работы в соответствии с выбранной целью уточнен существующий понятийный аппарат, обозначены этапы математического моделирования, которые могут быть реализованы обучающимися, предложена типовая задача, решение которой формирует необходимые навыки, даны методологические рекомендации по организации учебного процесса.

1. Понятия и определения

Подходы к построению математической модели, способы и методы ее изучения подробно изложены в обширной учебной и научной литературе (см., например, [16–19]). Однако в некоторых случаях возможности математического моделирования используют не рационально. Одна из причин этого заключается в том, что построенные математические модели не обладают нужными свойствами.

Основываясь на передовом педагогическом опыте, уточним понятие «математическое моделирование», которое определим как замену объекта исследования пригодной математической моделью и ее последующее изучение известными методами, способами. Математическую модель считаем пригодной, если она в достаточной мере обладает нужными свойствами применительно к конкретному исследованию.

1.1. Свойства математических моделей

Математическая модель может обладать многими свойствами. Однако ее использование не будет эффективным, если среди этих свойств отсутствуют те, которые нужны для проводимого исследования. Далее приведем краткое описание некоторых свойств математических моделей [20].

Свойство полноты. Полная математическая модель отражает существенные в данном случае свойства и качества объекта исследования.

Свойство адекватности. Адекватная математическая модель обеспечивает правильное качественное и точное количественное описание представляющих интерес характеристик объекта исследования. Например, при изучении технических устройств или систем математическую модель считают адекватной, если она описывает представляющие интерес количественные характеристики объекта исследования с относительной погрешностью не более заданного значения δ_0.

Свойство продуктивности. Это свойство связывают с возможностью располагать достоверными исходными данными. Если такой возможности нет, то математическая модель не обладает свойством продуктивности, ее дальнейшее использование становится затруднительным или невозможным.

Свойство экономичности. Если математическая модель обладает свойством экономичности, то ее изучение не требует больших затрат времени и ресурсов. Чем более простой является математическая модель, тем в большей степени она обладает этим свойством.

Установив нужные для проводимого исследования свойства, можно сформулировать требования к математической модели объекта исследования. Такие требования противоречивы и на практике могут быть удовлетворены на основе разумного компромисса, достигаемого при прохождении этапов математического моделирования.

1.2. Основные этапы математического моделирования

На рис. 1 представлена схема, которая определяет последовательность проведения основных этапов математического моделирования. В общем случае можно выделить следующие этапы математического моделирования.

На первом этапе математического моделирования выполняют неформальный переход от объекта исследования к его содержательной модели. Под содержательной моделью понимают условное описание объекта исследования, которое должно учитывать его особенности и количественные характеристики, существенные для рассматриваемого случая. При этом обосновывают допущения и упрощения, позволяющие не учитывать те свойства и качества объекта исследования, которые предполагают несущественными.

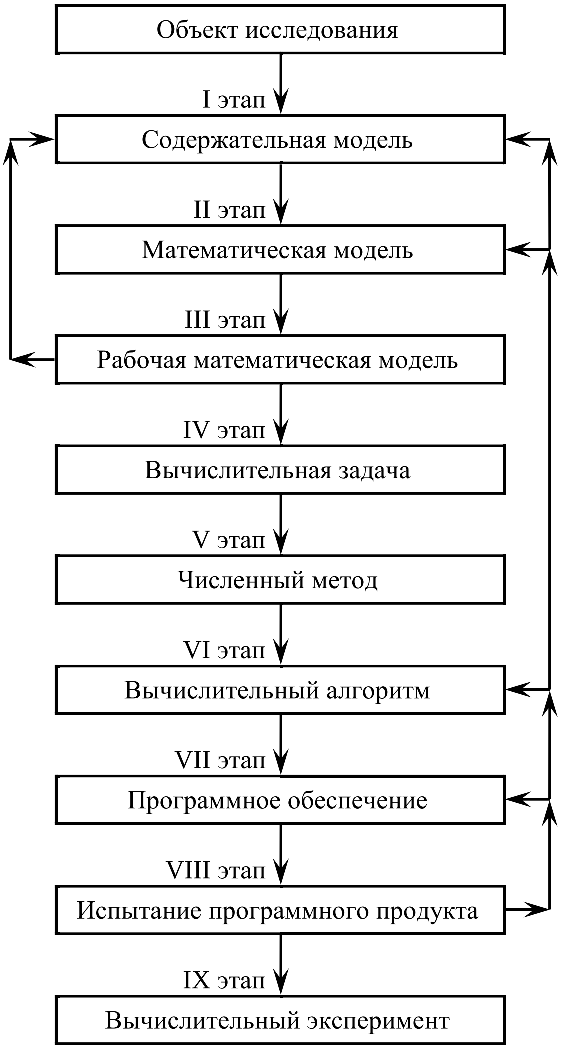

Рисунок 1 – Этапы математического моделирования.

На втором этапе осуществляют математическое описание содержательной модели. В результате такого формального описания получают математическую модель объекта исследования, причем можно разработать не одну, а несколько математических моделей одного и того же объекта исследования.

На третьем этапе математического моделирования при выполнении качественного и оценочного количественного анализа математической модели могут возникнуть основания для уточнения или пересмотра содержательной модели, что приведет к повторному прохождению первого этапа математического моделирования. Сравнение результатов анализа различных математических моделей позволяет сделать обоснованный выбор математической модели для дальнейшего детального количественного анализа. Итогом рассматриваемого этапа является разработка рабочей математической модели, то есть математической модели, предназначенной для детального количественного анализа.

На четвертом этапе формулируют вычислительную задачу, анализ результатов решения которой может дать ответы на интересующие вопросы.

На пятом этапе математического моделирования осуществляют обоснованный выбор или построение численного метода. Как правило, численный метод не включает многие детали, без которых невозможно использовать средства вычислительной техники. Тут необходима подробная детализация всех этапов вычислений, для того чтобы получить реализуемый алгоритм вычислительного эксперимента. Разработка эффективного алгоритма вычислительного эксперимента является итогом шестого этапа математического моделирования.

На седьмом этапе разрабатывают программное обеспечение, реализующее вычислительный алгоритм.

На восьмом этапе проводят испытание программного продукта. Тщательная проверка результатов расчетов может обнаружить недостатки, для устранения которых необходимо прохождение предыдущих этапов математического моделирования. После устранения всех выявленных недостатков приступают к реализации вычислительного эксперимента. Проведение вычислительного эксперимента является итогом завершающего девятого этапа математического моделирования.

Представленная последовательность этапов математического моделирования может видоизменяться в конкретных случаях. При этом для удовлетворения противоречивых требований, предъявляемых к математической модели объекта исследования, обычно соблюдают правила и выполняют рекомендации, которые стали результатом обобщения практического опыта, накопленного при построении математических моделей. В этой связи особый интерес представляют принципы построения математических моделей, которые носят общий и универсальный характер. Далее рассмотрим наглядный пример построения пригодной математической модели.

2. Пример построения математической модели

Построим пригодную математическую модель объекта исследования, используя широко известный принцип — принцип постепенного усложнения. Согласно данному принципу построение математической модели объекта исследования необходимо начинать с простейших математических моделей. Если модель обладает нужными свойствами применительно к конкретному исследованию, то ее используют на последующих этапах математического моделирования. В противном случае необходимо осуществить следующий цикл модификации математической модели, который приведет к построению более сложной модели, проверке ее пригодности и так далее до тех пор, пока не будет получена пригодная математическая модель. В этом случае удается построить целую совокупность моделей одного и того же объекта исследования. Сравнение результатов, полученных с использованием различных математических моделей, может не только обогатить познание о рассматриваемом объекте исследования, но и повысить достоверность полученных результатов.

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим параллельное соединение терморезисторов. Пусть T_i — температура i-го терморезистора, которая не зависит от пространственных координат, причем $T_i \le T^*$, $i \le n$. Температура T_i в начальный момент времени t_0 равна T_0. На поверхности терморезистора площадью S_i происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой равна T_0, коэффициент теплоотдачи известен и равен α_i. Для сравнительно узкого диапазона температур от T_0 до T^* считаем, что

$$R_i(T_i) = r_i\left[1+\beta_i(T_i - T_0)\right],$$

$$C_i(T_i) = c_i\left[1+\gamma_i(T_i - T_0)\right],$$

где $R_i(T_i)$ и $C_i(T_i)$ — сопротивление и полная теплоемкость i-го терморезистора; r_i и c_i — сопротивление и полная теплоемкость i-го терморезистора при $T_i = T_0$; β_i и γ_i — положительные постоянные величины. Через i-й терморезистор протекает электрический ток, сила которого равна

$$I_i = \frac{U}{r_i\left[1+\beta_i(T_i - T_0)\right]}, \qquad (1)$$

где U — постоянная разность электрических потенциалов на полюсах i-го элемента.

Пусть в рамках проводимого исследования представляет интерес величина

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i. \qquad (2)$$

Построим математическую модель макроуровня объекта исследования, которая в достаточной мере обладает свойствами полноты, адекватности, продуктивности и экономичности.

2.2. Решение задачи при $n = 1$

Для решения поставленной задачи разделим объект исследования на отдельные более простые элементы, допускающие их независимое исследование с последующим учетом взаимного влияния. Это позволяет перейти к рассмотрению технической системы, которая включает только один терморезистор, т. е. $n = 1$.

Выстроим иерархию математических моделей макроуровня такой технической системы и определим условия, при выполнении которых можно с относительной погрешностью не более заданного значения δ_0 найти искомую величину I_1.

Если разность $T_1 - T_0$ достаточно мала, то согласно (1) найдем искомую величину по формуле

$$I_0=\frac{U}{r_1}. \tag{3}$$

Определим условия, при которых применима полученная формула. Для этого рассмотрим установившийся процесс теплообмена. В этом случае мощность тепловыделения в материале терморезистора равна тепловому потоку, отводимому от терморезистора, т. е.

$$\frac{U^2}{R_1(T_*)}=\alpha_1(T_*-T_0)S_1,$$

где T_* — установившееся значение температуры терморезистора. Из полученного равенства легко найти

$$T_*=T_0+\frac{1}{2\beta_1}\left(-1+\sqrt{1+\frac{4\beta_1U^2}{\alpha_1S_1r_1}}\right),$$

а затем определить установившееся значение искомой величины

$$I_*=\frac{2U}{r_1\left[1+\sqrt{1+4\beta_1U^2\alpha_1^{-1}S_1^{-1}r_1^{-1}}\right]}, \tag{4}$$

причем для данного диапазона температур

$$\frac{U^2}{\alpha_1S_1r_1\left(T^*-T_0\right)}\le 1+\beta_1\left(T^*-T_0\right). \tag{5}$$

Для относительной погрешности величины I_0 запишем

$$\delta(I_0)=\left|\frac{I_1-I_0}{I_1}\right|=\frac{I_0}{I_1}-1\le\frac{I_0}{I_*}-1.$$

При выполнении неравенства

$$\frac{I_0}{I_*}-1\le\delta_0$$

можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (3) для нахождения искомой величины. Следовательно, при выполнении неравенства

$$I_0\le(1+\delta_0)I_* \tag{6}$$

математическая модель макроуровня (3) в достаточной мере обладает свойствами полноты, адекватности, продуктивности и экономичности.

Затем определим условия, при которых применима математическая модель (4). Для этого рассмотрим неустановившийся процесс теплообмена. В этом случае изменение температуры терморезистора во времени t описывает обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$C_1(T_1)\frac{dT_1}{dt}=\frac{U^2}{R_1(T_1)}-\alpha_1(T_1-T_0)S_1,$$

а начальное условие имеет вид

$$T_1(t_0)=T_0.$$

Учитывая, что

$$I_1=\frac{I_0}{1+\beta_1(T_1-T_0)},$$

сформулируем задачу Коши

$$\frac{c_1U}{\beta_1r_1I_1^2}\frac{dI_1}{dt}=\frac{\alpha_1S_1U-\alpha_1S_1r_1I_1-\beta_1r_1UI_1^2}{\gamma_1U-\gamma_1r_1I_1+\beta_1r_1I_1},$$

$$I_1(t_0)=Ur_1^{-1}. \tag{7}$$

Тогда найдем момент времени

$$t_1=t_0+\frac{c_1}{\alpha_1S_1}\left[\frac{\gamma_1}{\beta_1}\left(\frac{r_1I_*}{U}-1+\delta_0\right)\frac{U}{r_1I_*}+\right.$$
$$+\left(\frac{U}{2U-r_1I_*}+\frac{\gamma_1}{\beta_1}\frac{U-r_1I_*}{2U-r_1I_*}\frac{U}{r_1I_*}-1\right)\times$$
$$\times\ln\left(2-\frac{r_1I_*}{U}-\delta_0\right)-\left(\frac{U}{2U-r_1I_*}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\gamma_1}{\beta_1}\frac{U-r_1I_*}{2U-r_1I_*}\frac{U}{r_1I_*}\right)\ln\left(\frac{U}{U-r_1I_*}\delta_0\right)\right],$$

для которого

$$I_1(t_1)=\frac{I_*}{1-\delta_0}.$$

Очевидно, что при $t\ge t_1$

$$\delta(I_*)=\left|\frac{I_1-I_*}{I_1}\right|=1-\frac{I_*}{I_1}\le\delta_0,$$

а значение I_* можно с относительной погрешностью не более δ_0 считать равным $I_1(t)$. Следовательно, можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (4) для нахождения искомой величины. Это позволяет сформулировать следующее утверждение об использовании математической модели (4).

Утверждение 1. Если не выполнено условие (6), то математическая модель макроуровня (4) при $t\ge t_1$ в достаточной мере обладает свойствами полноты, адекватности, продуктивности и экономичности.

Разработка новой математической модели при формировании иерархии математических моделей объекта исследования может привести к уточнению найденных ранее условий применимости построенных математических моделей. Действительно, используя математическую модель (7), можно уточнить условие применимости формулы (3). Для этого найдем момент времени

$$t_1^*=t_0+\frac{c_1}{\alpha_1S_1}\left[\left(\frac{\gamma_1}{\beta_1}\frac{U-r_1I_*}{2U-r_1I_*}\frac{U}{r_1I_*}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{U}{2U-r_1I_*}-1\right)\ln\left(1+\frac{r_1I_*}{U}\delta_0\right)-$$

$$-\left(\frac{U}{2U-r_1I_*}+\frac{\gamma_1}{\beta_1}\frac{U-r_1I_*}{2U-r_1I_*}\frac{U}{r_1I_*}\right)\times$$

$$\left.\times\ln\left(1-\frac{r_1I_*}{U-r_1I_*}\delta_0\right)-\frac{\gamma_1}{\beta_1}\delta_0\right],$$

для которого

$$I_1\left(t_1^*\right)=\frac{I_0}{1+\delta_0}.$$

Очевидно, что при $t\le t_1^*$

$$\delta\left(I_0\right)=\left|\frac{I_1-I_0}{I_1}\right|=\frac{I_0}{I_1}-1\le\delta_0,$$

а значение I_0 можно с относительной погрешностью не более δ_0 считать равным $I_1(t)$. Следовательно, можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (3) для нахождения искомой величины. Это позволяет сформулировать утверждение об использовании математической модели (3).

Утверждение 2. Если выполнено условие (6) или $t\le t_1^*$, то математическая модель макроуровня (3) в достаточной мере обладает свойствами полноты, адекватности, продуктивности и экономичности.

Тогда применительно к построенной иерархии математических моделей данного объекта исследования справедливо следующее утверждение об использовании математической модели (7).

Утверждение 3. Если не выполнено условие (6), то математическая модель макроуровня (7) при $t_1^*<t<t_1$ в достаточной мере обладает свойствами полноты, адекватности, продуктивности и экономичности.

2.3. Решение задачи при *n* > 1

Пусть техническая система включает несколько параллельно соединенных терморезисторов. Для решения поставленной задачи используем полученные результаты при $n=1$. Они позволяют легко построить иерархию математических моделей макроуровня объекта исследования и определить условия, при выполнении которых можно с относительной погрешностью не более заданного значения δ_0 найти искомую величину I.

Если разности

$$T_1-T_0,\ldots,T_n-T_0$$

достаточно малы, то согласно (1) найдем искомую величину по формуле

$$I_0=U\sum_{i=1}^{n}r_i^{-1}. \qquad (8)$$

Определим условия, при которых применима полученная формула. Для этого рассмотрим установившийся процесс теплообмена. В этом случае согласно (4) и (5) установившееся значение величины I_i найдем по формуле

$$I_i^*=\frac{2U}{r_i\left[1+\sqrt{1+4\beta_iU^2\alpha_i^{-1}S_i^{-1}r_i^{-1}}\right]},$$

причем для данного диапазона температур

$$\frac{U^2}{\alpha_iS_ir_i\left(T^*-T_0\right)}\le1+\beta_i\left(T^*-T_0\right). \qquad (9)$$

Тогда установившееся значение искомой величины равно

$$I_*=\sum_{i=1}^{n}I_i^*. \qquad (10)$$

Для относительной погрешности величины I_0 запишем

$$\delta\left(I_0\right)=\left|\frac{I-I_0}{I}\right|=\frac{I_0}{I}-1\le\frac{I_0}{I_*}-1.$$

При выполнении неравенства

$$\frac{I_0}{I_*}-1\le\delta_0$$

можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (8) для нахождения искомой величины. Следовательно, при выполнении неравенства

$$I_0\le\left(1+\delta_0\right)I_* \qquad (11)$$

математическая модель макроуровня (8) в достаточной мере обладает свойствами полноты, адекватности, продуктивности и экономичности.

Затем определим условия, при которых применима математическая модель (10). Для этого рассмотрим неустановившийся процесс теплообмена. Тогда согласно (7) приходим к задаче Коши

$$\frac{c_iU}{\beta_ir_iI_i^2}\frac{dI_i}{dt}=\frac{\alpha_iS_iU-\alpha_iS_ir_iI_i-\beta_ir_iUI_i^2}{\gamma_iU-\gamma_ir_iI_i+\beta_ir_iI_i},$$

$$I_i\left(t_0\right)=Ur_i^{-1}, \qquad (12)$$

где $1\le i\le n$, и найдем момент времени

$$t_i=t_0+\frac{c_i}{\alpha_iS_i}\left[\frac{\gamma_i}{\beta_i}\left(\frac{r_iI_i^*}{U}-1+\delta_0\right)\frac{U}{r_iI_i^*}+\right.$$

$$+\left(\frac{U}{2U-r_iI_i^*}+\frac{\gamma_i}{\beta_i}\frac{U-r_iI_i^*}{2U-r_iI_i^*}\frac{U}{r_iI_i^*}-1\right)\times$$

$$\times\ln\left(2-\frac{r_iI_i^*}{U}-\delta_0\right)-\left(\frac{U}{2U-r_iI_i^*}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\gamma_i}{\beta_i}\frac{U-r_iI_i^*}{2U-r_iI_i^*}\frac{U}{r_iI_i^*}\right)\ln\left(\frac{U}{U-r_iI_i^*}\delta_0\right)\right],$$

для которого

$$I_i\left(t_i\right)=\frac{I_i^*}{1-\delta_0}.$$

Очевидно, что при $t\ge t_i$

$$\delta\left(I_i^*\right)=\left|\frac{I_i-I_i^*}{I_i}\right|=1-\frac{I_i^*}{I_i}\le\delta_0,$$

а значение I_i^* можно с относительной погрешностью не более δ_0 считать равным $I_i(t)$. Пусть $t_*=\max\limits_{1\le i\le n} t_i$, тогда легко показать, что при $t\ge t_*$

$$\delta\left(I_*\right)=\left|\frac{I-I_*}{I}\right|=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(I_i-I_i^*\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}I_i}\le\delta_0.$$

Следовательно, можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (10) для нахождения искомой величины. Это позволяет сформулировать следующее утверждение об использовании математической модели (10).

Утверждение 4. Если не выполнено условие (11), то математическая модель макроуровня (10) при $t\ge t_*$ в достаточной мере обладает свойствами полноты, адекватности, продуктивности и экономичности.

Уточним условие применимости формулы (8), используя математическую модель (2), (12). Для этого найдем момент времени

$$t_i^*=t_0+\frac{c_i}{\alpha_i S_i}\left[\left(\frac{\gamma_i}{\beta_i}\frac{U-r_iI_i^*}{2U-r_iI_i^*}\frac{U}{r_iI_i^*}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{U}{2U-r_iI_i^*}-1\right)\ln\left(1+\frac{r_iI_i^*}{U}\delta_0\right)-$$
$$-\left(\frac{U}{2U-r_iI_i^*}+\frac{\gamma_i}{\beta_i}\frac{U-r_iI_i^*}{2U-r_iI_i^*}\frac{U}{r_iI_i^*}\right)\times$$
$$\left.\times\ln\left(1-\frac{r_iI_i^*}{U-r_iI_i^*}\delta_0\right)-\frac{\gamma_i}{\beta_i}\delta_0\right],$$

для которого

$$I_i\left(t_i^*\right)=\frac{U}{r_i\left(1+\delta_0\right)}.$$

Очевидно, что при $t\le t_i^*$

$$\delta\left(Ur_i^{-1}\right)=\left|\frac{I_i-Ur_i^{-1}}{I_i}\right|=\frac{U}{r_iI_i}-1\le\delta_0,$$

а значение Ur_i^{-1} можно с относительной погрешностью не более δ_0 считать равным $I_i(t)$. Пусть $t^*=\min\limits_{1\le i\le n} t_i^*$, тогда легко показать, что при $t\le t^*$

$$\delta\left(I_0\right)=\left|\frac{I-I_0}{I}\right|=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(Ur_i^{-1}-I_i\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}I_i}\le\delta_0.$$

Следовательно, можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (8) для нахождения искомой величины. Это позволяет сформулировать утверждение об использовании математической модели (8).

Утверждение 5. Если выполнено условие (11) или $t\le t^*$, то математическая модель макроуровня (8) в достаточной мере обладает свойствами полноты, адекватности, продуктивности и экономичности.

Тогда применительно к построенной иерархии математических моделей данного объекта исследования справедливо следующее утверждение об использовании математической модели (2), (12).

Утверждение 6. Если не выполнено условие (11), то математическая модель макроуровня (2), (12) при $t^*<t<t_*$ в достаточной мере обладает свойствами полноты, адекватности, продуктивности и экономичности.

2.4. Выводы

Построение иерархии математических моделей макроуровня объекта исследования при выполнении неравенства (9) позволяет выявить математическую модель макроуровня, которая в достаточной мере обладает нужными свойствами применительно к конкретному исследованию, а исследователь получает ценный интеллектуальный продукт — эквивалент изучаемого объекта для рассматриваемого им частного случая. Действительно, если выполнено условие (11) или в рамках проводимого исследования $t\le t^*$, то математическую модель макроуровня (8) рассматриваем как пригодную математическую модель. Если не выполнено условие (11), то при $t\ge t_*$ выбираем математическую модель (10). В противном случае пригодной математической моделью считаем математическую модель макроуровня (2), (12).

Очевидно, что применение пригодной математической модели приводит к сокращению затрат времени и средств на проведение исследования, позволяет рационально использовать возможности математического моделирования.

Заключение

Преподавание математического моделирования с учетом изложенных теоретических и методологических особенностей не требует существенной корректировки содержания дисциплины, специальной организации учебного процесса. Необходимые прикладные задачи могут быть легко получены из уже существующих задач. Однако реализация таких особенностей развивает личностные качества и индивидуальные способности обучающихся, создает условия для повышения уровня математической подготовки как отдельного обучающегося, так и группы в целом, формирует общую и неразрывную связь между изучаемыми дисциплинами, улучшает качество подготовки обучающихся к будущей профессиональной деятельности в условиях быстро изменяющегося мира.

Статья может быть полезной не только преподавателям и учителям, которые применяют элементы математического моделирования, но и широкому кругу читателей, заинтересованных в использовании возможностей математического моделирования.

References:

1. De Marchi, S. (2005). *Computational and Mathematical Modeling in the Social Sciences.* Cambridge University Press.
2. Cristini, V., & Lowengrub, J. (2010). *Multiscale Modeling of Cancer: An Integrated Experimental and Mathematical Modeling Approach.* Cambridge University Press.
3. Lewandowsky, S., & Farrell, S. (2011). *Computational Modeling in Cognition: Principles and Practice.* SAGE.
4. Hoppitt, W., & Laland, K. N. (2013). *Social Learning: An Introduction to Mechanisms, Methods, and Models.* Princeton University Press.
5. Fennel, W., & Neumann, T. (2015). *Introduction to the Modelling of Marine Ecosystems.* Elsevier.
6. Eraslan, A., & Kant, S. (2015). Modeling Processes of 4th-Year Middle-School Students and the Difficulties Encountered. *Kuram ve Uygulamada Egitim Bilimleri*, *15*(3), 809–824. https://doi.org/10.12738/estp.2015.3.2556
7. Krutikhina, M. V., Vlasova, V. K., Galushkin, A. A., & Pavlushin, A. A. (2018). Teaching of Mathematical Modeling Elements in the Mathematics Course of the Secondary School. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(4), 1305–1315. https://doi.org/10.29333/ejmste/83561
8. Anhalt, C. O., & Cortez, R. (2016). Developing Understanding of Mathematical Modeling in Secondary Teacher Preparation. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19*(6), 523–545. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9309-8
9. Fedoseyev, V. M. (2016). Involving Students in Research as a Form of Integration of Engineering with Mathematical Education. *Integration of Education*, *20*(1), 125–133. https://doi.org/10.15507/1991-9468.082.020.201601.125-133
10. Czocher, J. A. (2017). How can Emphasizing Mathematical Modeling Principles Benefit Students in a Traditionally Taught Differential Equations Course? *Journal of Mathematical Behavior*, *45*, 78–94. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.10.006
11. Shilova, Z. V., & Sibgatullina, T. V. (2017). Methodology Features of Teaching Stochastics to University Students of the Biology Specialization. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *13*(8), 4725–4738. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.00960a
12. Kim, S. H., & Kim, S. (2010). The Effects of Mathematical Modeling on Creative Production Ability and Self-Directed Learning Attitude. *Asia Pacific Education Review*, *11*(2), 109–120. https://doi.org/10.1007/s12564-009-9052-x
13. Larripa, K. R., & Mazzag, B. (2016). A Modular Approach to Teaching Mathematical Modeling in Biotechnology in the Undergraduate Curriculum. *PRIMUS*, *26*(5), 485–504. https://doi.org/10.1080/10511970.2015.1104524
14. Seshaiyer, P. (2017). Leading Undergraduate Research Projects in Mathematical Modeling. *PRIMUS*, *27*(4–5), 476–493. https://doi.org/10.1080/10511970.2016.1240732
15. Anhalt, C. O., Cortez, R., & Bennett, A. B. (2018). The Emergence of Mathematical Modeling Competencies: An Investigation of Prospective Secondary Mathematics Teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, *20*(3), 202–221. https://doi.org/10.1080/10986065.2018.1474532
16. Samarskii, A. A., & Mikhailov, A. P. (2002). *Principles of Mathematical Modeling: Ideas, Methods, Examples.* Taylor & Francis.
17. Dym, C. L. (2004). *Principles of Mathematical Modeling.* Elsevier Academic Press.
18. Velten, K. (2009). *Mathematical Modeling and Simulation: Introduction for Scientists and Engineers.* Wiley-VCH.

19. Meerschaert, M. M. (2013). *Mathematical Modeling.* Academic Press.
20. Markelov, G. Ye. (2005). Basic Principles to Construct Mathematical Models. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, (4), 59–70.