

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
ПИИЦ (Russia) = 0.191
ESJI (KZ) = 8.100
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

International Scientific Journal Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2024 Issue: 07 Volume: 135

Published: 23.07.2024 <http://T-Science.org>

Issue



Article



Igor Sergeevich Kazei

Bauman Moscow State Technical University
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
associate professor
Moscow, Russia
ikazey@bmstu.ru

A MATHEMATICAL MODEL OF THE BRIDGE FLUTTER IN CASE OF STATIONARY WIND FLOW

Abstract: The article considers a mathematical model of the torsion-bending flutter of a bridge under stationary wind flow. The formulation of the problem is similar to the problem of the wing flutter when flowing around a rigid and thin plate, but for the boundary condition of the hinge support. It is assumed that the flow is smooth without the formation of vortices. Using the example of the Tacoma Bridge, it is shown that even in such a rough approximation, the constructed mathematical model gives an acceptable value of the critical wind speed.

Key words: aeroelasticity, bridge flutter, wind flow, thin plate, aerodynamic coefficients.

Language: Russian

Citation: Kazei, I.S. (2024). A mathematical model of the bridge flutter in case of stationary wind flow. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 07 (135), 23-27.

Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-07-135-5> **Doi:**  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2024.07.135.5>

Scopus ASCC: 2610.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФЛАТТЕРА МОСТА ПРИ СТАЦИОНАРНОМ ОБТЕКАНИИ ВЕТРОВЫМ ПОТОКОМ

Аннотация: В статье рассматривается математическая модель изгибно-крутильного флаттера моста при стационарном обтекании ветровым потоком. Постановка задачи аналогична задаче о флаттере крыла при обтекании жесткой и тонкой пластины, но для граничного условия шарнирного опирания. Предполагается, что обтекание плавное без образования вихрей. На примере Такома моста показано, что даже в столь грубом приближении построенная математическая модель дает приемлимое значение критической скорости ветра.

Ключевые слова: аэроупругость, флаттер моста, ветровой поток, тонкая пластина, аэродинамические коэффициенты.

Введение

Воздействие ветрового потока на мостовые сооружения с пролетами большой протяженности весьма существенно. Ветровая нагрузка сильно влияет на напряженно-деформированное состояние моста и на безопасность его эксплуатации. Действие ветра на сооружение может приводить к аэроупругой неустойчивости. Если тело в потоке воздуха отклоняется под действием некоторой силы и это начальное отклонение вызывает последующие отклонения, носящие колебательный характер или характер

нарастающих во времени перемещений, то в этом случае говорят, что возникает аэроупругая неустойчивость.

Аэроупругой неустойчивости наиболее подвержены большепролетные вантовые и висячие мосты. В данной статье рассматривается математическая модель изгибно-крутильного флаттера моста, представляющая собой шарнирно опертую балку.

В процессе работы над статьей были использованы различные литературные источники, позволяющие войти в круг проблем

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИНЦ (Russia) = 0.191
 ESJI (KZ) = 8.100
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

теории аэроупругости и построить необходимые алгоритмы. В книге В.Л. Бидермана [1] обсуждены основы теории колебаний механических систем и численные методы расчета, позволяющие находить собственные частоты и формы колебаний различных конструкций. Эти методы использованы в работе для нахождения собственных частот и форм колебаний модели моста. Проблемы флаттерной неустойчивости применительно к авиационным конструкциям рассматривались еще в 30-х годах XX века. Здесь можно указать на работы Е.П. Гроссмана [2] и М.В. Келдыша [4]. Подробному введению в теорию аэроупругости посвящены работы [5-9]. Сильное влияние на интерес к изучению флаттера мостов оказала знаменитая

катастрофа моста Такома-Нарроуз в 1940 году. Книга М.И. Казакевича [3] рассматривает вопросы аэроупругого взаимодействия мостов с ветровым потоком. Вопросы построения алгоритмов вычисления критической скорости флаттера обсуждены в [10-11]. Э. Симиу и Р. Сканлан в свою книгу [12] посвятили вопросам влияния ветровой нагрузки на здания и сооружения. Здесь же отмечена необходимость аэродинамических модельных испытаний при их проектировании.

2. Постановка задачи

В качестве модели моста выберем шарнирно опертую по концам балку длины l и ширины b . Пусть мост находится в набегающем потоке воздуха скорости v (рис.1).

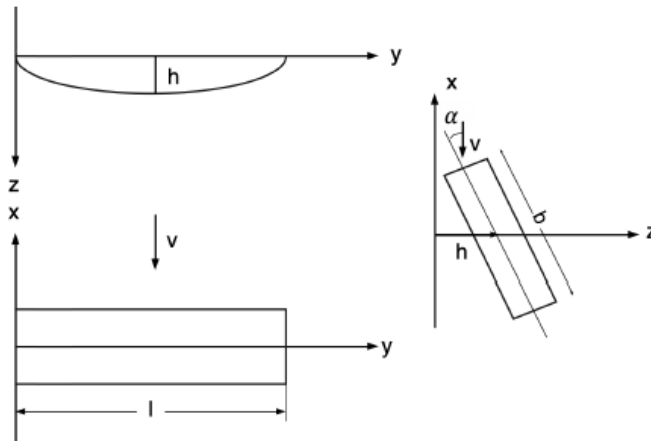


Рисунок 1. Модель моста в системе координат.

В качестве исходной системы уравнений, следуя [9], рассмотрим

$$\begin{cases} EI \frac{\partial^4 h}{\partial y^4} + m \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + L = 0, \\ GJ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} - I_\alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + M = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где EI - изгибная жесткость моста, GJ - крутильная жесткость моста, I_α - массовый момент инерции около упругой оси, m - распределенная масса на единицу длины, L -

аэродинамическая сила, M - аэродинамический момент, $h = h(y, t)$ - вертикальное перемещение, $\alpha = \alpha(y, t)$ - угол поворота вокруг упругой оси. Все константы предполагаются постоянными.

Граничные условия имеют вид:

$$h(0, t) = h(l, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0, t) = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(l, t) = 0,$$

$$\alpha(0, t) = \alpha(l, t). \quad (2)$$

Для модели стационарного обтекания тонкой пластины выражения для аэродинамической силы и момента возьмем в виде:

$$L = \frac{\rho v^2}{2} b C_L, \quad C_L = C_1 \frac{1}{v} \frac{\partial h}{\partial t} + C_2 \frac{1}{v} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + C_3 \alpha, \quad (3)$$

$$M = \frac{\rho v^2}{2} b^2 C_M, \quad C_M = C_4 \frac{1}{v} \frac{\partial h}{\partial t} + C_5 \frac{1}{v} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + C_6 \alpha, \quad (4)$$

причем

$$C_1 = C_3 = \frac{dC_L}{d\alpha}, \quad C_2 = \frac{dC_L}{d\alpha} \left(\frac{3}{4} b - x_0 \right), \quad C_4 = C_6 = \frac{dC_M}{d\alpha} \left(\frac{3}{4} b - x_0 \right).$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 0.191
 ESJI (KZ) = 8.100
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

В формулах (3) числовые константы: C_L - коэффициент аэродинамической силы, C_M - коэффициент аэродинамического момента, ρ - плотность воздуха, v - скорость набегающего потока, C_i ($i = 1, \dots, 6$) - аэродинамические коэффициенты.

$$\begin{cases} EI \frac{\partial^4 h}{\partial y^4} + m \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \\ + \frac{\rho v^2}{2} b \left(C_1 \frac{1}{v} \frac{\partial h}{\partial t} + C_2 \frac{1}{v} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + C_3 \alpha \right) = 0, \\ GJ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} - I_\alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \\ + \frac{\rho v^2}{2} b^2 \left(C_4 \frac{1}{v} \frac{\partial h}{\partial t} + C_5 \frac{1}{v} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + C_6 \alpha \right) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

Решение системы (5) ищем в форме

$$h = Af(y)e^{\lambda t}, \quad \alpha = B\varphi(y)e^{\lambda t}, \quad (6)$$

где $\lambda = p + i\omega$, A и B - константы.

Случай $p = 0$ и $\omega \neq 0$ соответствует критической скорости флаттера. Рассмотрим движение при критическом условии флаттера и определим критическую скорость. Пусть

$$\begin{cases} A(a_{11} - c_{11}\omega^2 + iv\omega d_{11}) + B(b_{12}v^2 + iv\omega d_{12}) = 0, \\ A(iv\omega d_{21}) + B(a_{22} + c_{22}\omega^2 + b_{22}v^2 + iv\omega d_{22}) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$a_{11} = EI \int_0^l \frac{d^4 f}{dy^4} \cdot f \, dy, \quad a_{22} = GJ \int_0^l \frac{d^2 f}{dy^2} \cdot f \, dy, \quad b_{12} = \frac{\rho b}{2} C_3 \int_0^l f \varphi \, dy, \quad b_{22} = \frac{\rho b^2}{2} C_6 \int_0^l \varphi^2 \, dy,$$

$$c_{11} = m \int_0^l f^2 \, dy, \quad c_{22} = I_\alpha \int_0^l \varphi^2 \, dy, \quad d_{11} = \frac{\rho b}{2} C_1 \int_0^l f^2 \, dy, \quad d_{12} = \frac{\rho b}{2} C_2 \int_0^l f \varphi \, dy,$$

$$d_{21} = \frac{\rho b^2}{2} C_4 \int_0^l f \varphi \, dy, \quad d_{22} = \frac{\rho b^2}{2} C_5 \int_0^l \varphi^2 \, dy.$$

Однородная система уравнений (8) имеет отличные от нуля решения A и B , если определитель матрицы коэффициентов этой системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - c_{11}\omega^2 + iv\omega d_{11} & b_{12}v^2 + iv\omega d_{12} \\ iv\omega d_{21} & a_{22} + c_{22}\omega^2 + b_{22}v^2 + iv\omega d_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

Раскрываем определитель (9) и приравниваем отдельно нулю действительную и мнимую части выражения. Получим в результате систему:

3. Метод решения задачи

Критическую скорость флаттера, при которой произойдет разрушение моста находим при помощи метода Бубнова - Галеркина. В уравнения (1) подставим выражения (3), (4) и получим систему

$$h = Af(y)e^{i\omega t}, \quad \alpha = A\varphi(y)e^{i\omega t}. \quad (7)$$

Подставим h и α в форму (7) в систему (5), сократим потом на множитель $e^{i\omega t}$, умножим после этого первое уравнение на $f(y)dy$, второе - на $\varphi(y)dy$ и проинтегрируем их в пределах от 0 до l , получим

$$\begin{cases} A_1\omega^4 - (C_1 - C_2v^2)\omega^2 + (E_1 + E_2v^2) = 0, \\ -B_1\omega^2 + (D_1 + D_2v^2) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
РИИЦ (Russia) = 0.191
ESJI (KZ) = 8.100
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

$$A_1 = -c_{11}c_{22} \quad B_1 = c_{11}d_{22} - c_{22}d_{11},$$

$$C_1 = -a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11},$$

$$C_2 = c_{11}b_{22} + d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}$$

$$D_1 = a_{11}d_{22} + a_{22}d_{11}, \quad D_2 = b_{22}d_{11} - b_{12}d_{21},$$

$$E_1 = a_{11}a_{22}, \quad E_2 = a_{11}b_{22}.$$

Из второго уравнения (10) найдем

$$\omega^2 = \frac{D_1 + D_2 v^2}{B_1}. \quad (11)$$

Подставляя ω^2 из формулы (11) в первое уравнение системы, получим

$$Lv^4 + Mv^2 + N = 0, \quad (12)$$

где

$$L = D_2(B_1C_2 - D_2A_1),$$

$$M = B_1C_2D_1 + B_1C_1D_2 - B_1^2E_2 - 2D_1D_2A_1,$$

$$N = B_1C_1D_1 - B_1^2E_1 - D_1^2A_1.$$

Из биквадратного уравнения (12) находим критическую скорость

$$v^2 = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - 4LN}}{2L}. \quad (13)$$

Знак перед корнем выбираем из условия получения наименьшего положительного значения v^2 .

4. Результаты

Проведем расчет скорости флаттера для моста Такома – Нэрроуз (рис.2).

Исходные данные возьмем из статьи [10]:

$$EI = 2,33 \cdot 10^5 \text{ H} \cdot \text{м}^2, \quad GJ = 9,32 \cdot 10^9 \text{ H} \cdot \text{м}^2,$$

$$m = 8482,67 \cdot 10^5 \text{ кг/м}, \quad I_\alpha = 80000,0 \text{ кг} \cdot \text{м},$$

$$b = 11,89 \text{ м}, \quad l = 853 \text{ м}, \quad \rho = 1,2250 \text{ кг/м}^3.$$

В качестве функций $f(y)$ и $\varphi(y)$ выберем первые формы чисто изгибных и чисто крутильных колебаний, которые удовлетворяют граничным условиям (2):

$$f(y) = \sin \frac{\pi}{l} y, \quad \varphi(y) = \sin \frac{\pi}{l} y.$$



Рисунок 2. Мост Такома-Нэрроуз.

Скорость ветра, при которой произошло разрушение моста Такома - Нэрроуз, равна примерно 18 м/с .

Результат вычисления скорости флаттера моста Такома - Нэрроуз по приведенному алгоритму: $v = 22,7 \text{ м/с}$.

5. Заключение

Использование построенной модели дает хорошее приближение к истинному значению скорости флаттера моста. Математическая модель

может быть, конечно, улучшена. Система уравнений (1) является связанной благодаря аэродинамическим силе и моменту. Уточнение модели аэродинамики приведет к более точному определению скорости флаттера. Описание аэродинамической неустойчивости при помощи данной сравнительно простой модели дает адекватные результаты и позволяет быстро получить достаточно точную оценку скорости ветра, при которой происходит разрушение мостовой конструкции.

| | | | |
|-----------------------|---------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| Impact Factor: | ISRA (India) = 6.317 | SIS (USA) = 0.912 | ICV (Poland) = 6.630 |
| | ISI (Dubai, UAE) = 1.582 | PIHII (Russia) = 0.191 | PIF (India) = 1.940 |
| | GIF (Australia) = 0.564 | ESJI (KZ) = 8.100 | IBI (India) = 4.260 |
| | JIF = 1.500 | SJIF (Morocco) = 7.184 | OAJI (USA) = 0.350 |

References:

1. Biderman, V.L. (1980). *Teoriya mekhanicheskikh kolebanij.* (p.408). Moscow: Vysshaya shkola.
2. Grossman, E.P. (1940). *Kurs vibracij chastej samoleta.* (p.312). Moscow: Oborongiz.
3. Kazakevich, M.I. (1987). *Aerodinamika mostov, Transport,* 1987, 240 p.
4. Keldysh, M.V. (1985). *Izbrannye trudy: Mekhanika.* Moscow: Nauka.
5. Lamper, R.E. (1990). *Vvedenie v teoriyu flattera.* (p.144). Moscow: Mashinostroenie.
6. Fershing, G.V. (1984). *Osnovy aerouprugosti.* (p.600). Moscow: Mashinostroenie.
7. Bisplinghoff, R.L., Ashley, H., & Halfman, R.L. (1955). *Aeroelasticity.* Addison-Wesley Publishing Company, Cambridge.
8. Dowell, E.H. (2015). *A modern course in aeroelasticity.* Springer International Publishing, Switzerland.
9. Fung, Y.C. (1993). *An introduction to the theory of aeroelasticity.* Dover Publications, Inc, New York.
10. Meirovitch, L. (1987). *Control of flutter in bridges.* 1987, 113, №5, 720-736 pp.
11. Meirovitch, L. (1980). *Computational Methods in Structural Dynamics.* Sijthoff Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980, 439 p.
12. Simiu, E., & Scanlan, R.H. (1978). *Wind effects on Structures: An introduction to wind engineering.* John Wiley & Sons, Inc. New York.