

## Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317  
ISI (Dubai, UAE) = 1.582  
GIF (Australia) = 0.564  
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
ПИИИ (Russia) = 0.191  
ESJI (KZ) = 8.100  
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630  
PIF (India) = 1.940  
IBI (India) = 4.260  
OAJI (USA) = 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

### International Scientific Journal Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2024 Issue: 08 Volume: 136

Published: 07.08.2024 <http://T-Science.org>

Issue

Article



Igor Sergeevich Kazei

Bauman Moscow State Technical University  
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor,  
Moscow, Russia  
[ikazey@bmstu.ru](mailto:ikazey@bmstu.ru)

## NORMAL DISPLACEMENT OF THE ELASTIC HALF-SPACE BOUNDARY UNDER UNIFORM LOADING OF A RECTANGULAR AREA

**Abstract:** The article considers the problem of an elastic half-space under the action of a load uniformly distributed over a rectangle. A solution to a similar problem is known, which is obtained using the potential of a simple layer for points inside the load application area. The formula for the vertical displacement of the points of the boundary of the half-space lying inside the loading area has been refined. The relations for vertical displacements outside the loading area are also obtained. The formulas for the desired displacements outside and inside the loading area have a similar structure.

**Key words:** elastic half-space, loading area, potential of a simple layer, observation point.

**Language:** Russian

**Citation:** Kazei, I.S. (2024). Normal displacement of the elastic half-space boundary under uniform loading of a rectangular area. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 08 (136), 14-20.

**Soi:** <http://s-o-i.org/1.1/TAS-08-136-2> **Doi:**  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2024.08.136.2>

**Scopus ASCC:** 2610.

### НОРМАЛЬНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ГРАНИЦЫ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ РАВНОМЕРНОМ НАГРУЖЕНИИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

**Аннотация:** В статье рассмотрена задача об упругом полупространстве, находящемся под действием равномерно распределенной по прямоугольнику нагрузки. Известно решение подобной задачи, которое получено с помощью потенциала простого слоя для точек внутри области приложения нагрузки. Произведено уточнение формулы для вертикального перемещения точек границы полупространства лежащих внутри области нагружения. Получены также соотношения для вертикальных перемещений вне области нагружения. Формулы для искомых перемещений снаружи и внутри области нагружения имеют сходную структуру.

**Ключевые слова:** упругое полупространство, область нагружения, потенциал простого слоя, точка наблюдения.

#### Введение

Задача о действии сил на упругое полупространство прочно ассоциируется с именем Буссинеска. Он рассмотрел действие сосредоточенной силы, нормальной к границе упругого полупространства [1]. Более общая задача о напряженном состоянии в упругом полупространстве при нагружении по границе произвольной системой нормальных и касательных усилий обсуждалась в работах

Черрути. Решения Буссинеска и Черрути приведены в [2]. В книгах [3] – [4] можно найти решения задач Буссинеска и Черрути и некоторые их обобщения. Работа [5] содержит решения задач о нагружении областей различной формы, лежащих на границе упругого полупространства. Особый интерес представляет статья [6], где подробно обсуждено решение задачи о нагружении упругого полупространства по кругу и квадрату при использовании метода потенциала.

## Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317  
ISI (Dubai, UAE) = 1.582  
GIF (Australia) = 0.564  
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
ПИИЦ (Russia) = 0.191  
ESJI (KZ) = 8.100  
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630  
PIF (India) = 1.940  
IBI (India) = 4.260  
OAJI (USA) = 0.350

В работах [7], [8] при решении аналогичных задач используются методы интегральных преобразований. Книга [9] содержит не только решения задач о воздействии сил на упругое полупространство, но и указания на их практическое применение. При решении контактной задачи о пластинке на упругом полупространстве в [10] было получено разложение решения Буссинеска для определения перемещений поверхности в виде двойного ряда по полиномам Чебышева в прямоугольной области.

В данной работе производится уточнение и дополнение решения, полученного в [5] при использовании теории потенциала, на область вне нагружения для задачи о действии распределенной нагрузки на прямоугольную область, находящуюся на поверхности упругого полупространства.

### 2. Постановка задачи

Рассмотрим упругое полупространство, на поверхности которого находится равномерно нагруженная прямоугольная область. Пусть нагрузка приложена нормально к поверхности. Найдем перемещения точек поверхности полупространства, вызванные действием приложенной нагрузки. Решение поставленной задачи получим, опираясь на результаты, приведенные в работах А.И. Лурье [6].

### 3. Метод решения задачи

Один из распространенных способов нахождения решения состоит во введении функции  $\omega(x, y, z)$ , называемой потенциалом простого слоя. При этом все необходимые величины (перемещения, напряжения) выражаются через  $\omega(x, y, z)$ . Потенциал простого слоя при постоянной распределенной нагрузке  $p = const$  в декартовой системе координат будет иметь вид:

$$\omega(x, y, z) = p \iint_{\Omega} \frac{ds'}{R'} = p \iint_{\Omega} \frac{ds'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}}, \quad (1)$$

где  $\Omega$  - область нагружения плоскости  $z = 0$ ,  $ds'$  - элемент площади под нагрузкой,  $(x', y', 0)$  - координаты точек под нагрузкой,  $(x, y, z)$  - координаты точки наблюдения.

Вычислим интеграл (1). Для этого введем следующие обозначения:  $M(x, y, z)$  - некоторая точка наблюдения,  $P(x, y, 0)$  или для краткости  $P(x, y)$  - её проекция на плоскость  $z = 0$ . Примем точку  $P$  за начало полярной системы координат  $(\rho, \lambda)$ :  $x' - x = \rho \cos \lambda$ ,  $y' - y = \rho \sin \lambda$ ,

$$ds' = \rho \cdot d\rho d\lambda. \quad (2)$$

При переходе к полярной системе координат интеграл (1) преобразуется к виду:

$$\omega(x, y, z) = p \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \int_{\rho_1(\lambda)}^{\rho_2(\lambda)} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = p \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left[ \sqrt{\rho_2^2(\lambda) + z^2} - \sqrt{\rho_1^2(\lambda) + z^2} \right] d\lambda. \quad (3)$$

Следует отметить, что  $\rho_1(\lambda)$ ,  $\rho_2(\lambda)$ ,  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$  определяются видом области интегрирования. Предположим, что область нагружения  $\Omega$  ограничена и находится на поверхности упругого полупространства  $z = 0$ , тогда возможны два случая: точка начала системы координат  $P$  может находиться внутри или снаружи области  $\Omega$ .

Для точки  $P$ , которая находится внутри области  $\Omega$  (Рис. 1):  $z = 0$ ,  $\rho_1(\lambda) = 0$ ,  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_1 = 2\pi$  и формула (3) имеет вид

$$\omega(x, y, 0) = p \int_0^{2\pi} \rho_2(\lambda) d\lambda. \quad (4)$$

Для точки  $P$ , которая находится снаружи области  $\Omega$  (Рис. 2):  $z = 0$ , и формула (3) принимает вид

$$\omega(x, y, 0) = p \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} [\rho_2(\lambda) - \rho_1(\lambda)] d\lambda \quad (5).$$

**Impact Factor:**

ISRA (India) = 6.317	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 1.582	ПИИЦ (Russia) = 0.191	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 8.100	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 7.184	OAJI (USA) = 0.350

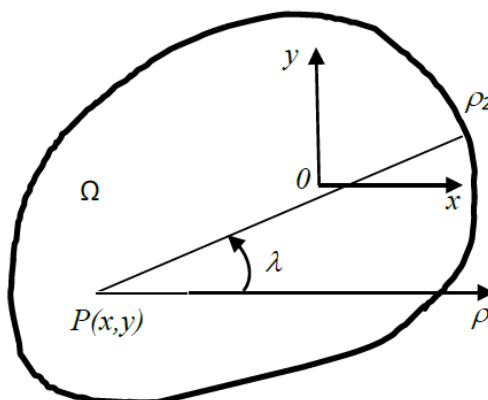


Рисунок 1. Точка  $P$  внутри области  $\Omega$ .

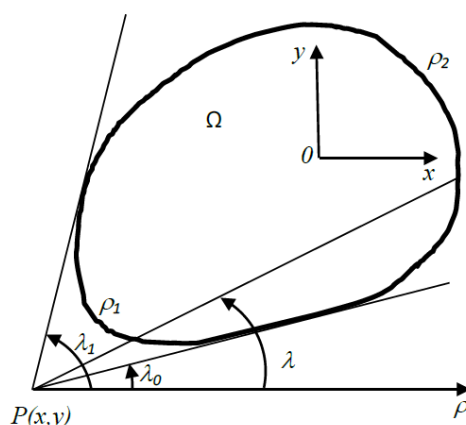


Рисунок 2. Точка  $P$  снаружи области  $\Omega$ .

Построим алгоритм вычисления вертикальн  
Построим алгоритм вычисления вертикального  
перемещения  $w$  точек равномерно нагруженной  
прямоугольной области.

Для внутренних точек прямоугольника  
получим формулу для определения перемещения

$w$ . Пусть равномерное нагружение  
прямоугольной области имеет интенсивность  $p$ .  
Расположим начало координат в центре  
прямоугольника и направим оси  $x$  и  $y$  параллельно  
его сторонам, как это показано на Рис.3.

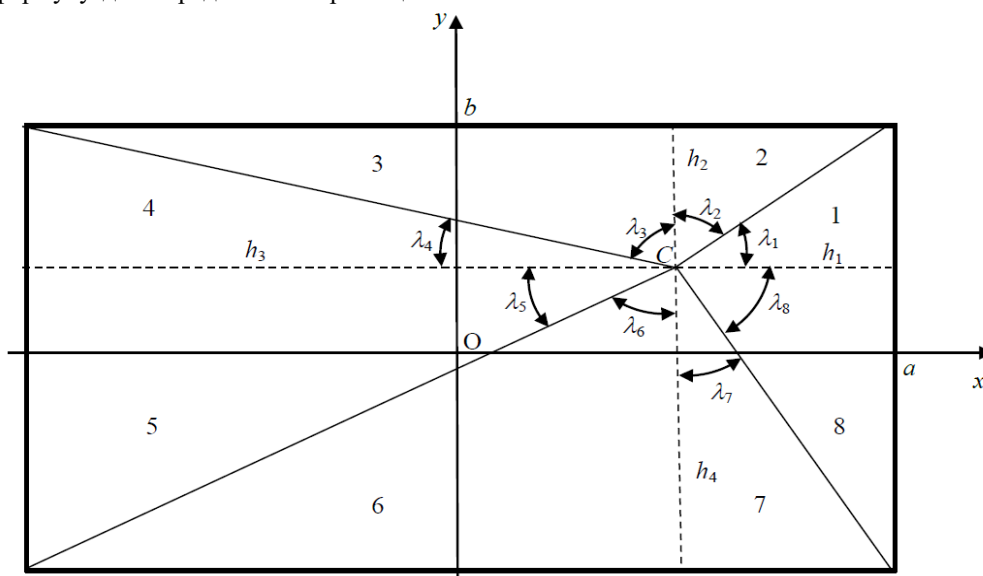


Рисунок 3. Точка наблюдения  $C(x, y)$  внутри прямоугольника нагружения.

## Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317  
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582  
 GIF (Australia) = 0.564  
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
 ПИИЦ (Russia) = 0.191  
 ESJI (KZ) = 8.100  
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630  
 PIF (India) = 1.940  
 IBI (India) = 4.260  
 OAJI (USA) = 0.350

Выберем произвольную точку  $C(x, y)$  внутри прямоугольника. Пусть она находится, например, в первом квадранте системы координат с осями параллельными сторонам прямоугольника и началом в его центре. Соединим  $C(x, y)$  с углами прямоугольника и опустим из точки  $C(x, y)$  перпендикуляры на каждую из его сторон. В результате, рассматриваемая прямоугольная область разделится на восемь прямоугольных треугольников  $\Omega_i$ , пронумерованных так, как показано на Рис.3

$$(\Omega = \bigcup_{i=1}^8 \Omega_i).$$

В каждом треугольнике естественным образом острые углы и высоты при вершине  $C(x, y)$  получают наименования  $\lambda_i$  и  $H_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ). Обозначим

$$H_1 = h_1, H_2 = h_2, H_3 = h_2, H_4 = h_3, \\ H_5 = h_3, H_6 = h_4, H_7 = h_4, H_8 = h_1.$$

Кроме того, отметим, что

$$h_1 = a - x, h_2 = b - y, h_3 = a + x_2,$$

$$h_4 = b + y.$$

$$\sin \lambda_1 = \frac{h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}, \sin \lambda_2 = \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

$$\sin \lambda_3 = \frac{h_3}{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}}, \sin \lambda_4 = \frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}},$$

$$\sin \lambda_5 = \frac{h_4}{\sqrt{h_3^2 + h_4^2}}, \sin \lambda_6 = \frac{h_3}{\sqrt{h_3^2 + h_4^2}},$$

$$\sin \lambda_7 = \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_4^2}}, \sin \lambda_8 = \frac{h_4}{\sqrt{h_1^2 + h_4^2}}.$$

Вычисление  $\omega(x, y, 0)$  сводится к вычислению интегралов по площадям треугольников  $\Omega_i$  и их последующему алгебраическому сложению. В [1] показано, что значение потенциала простого слоя на границе упругого полупространства пропорционально нормальной компоненте перемещения:

$$w = \frac{m-1}{2\pi mG} \omega(x, y, 0)$$

где  $m$  - число Пуассона,  $G$  - модуль сдвига.

В системе координат с центром в точке  $C(x, y)$  перейдем к полярной системе координат, тогда интеграл (1) при  $z = 0$  примет вид:

$$\omega(x, y, 0) = p \iint_{\Omega} \frac{ds'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} = \\ = p \iint_{\Omega} \frac{\rho d\rho d\lambda}{\sqrt{\rho^2 \cos^2 \lambda + \rho^2 \sin^2 \lambda}} = p \iint_{\Omega} d\rho d\lambda.$$

$$\omega(x, y, 0) = p \iint_{\Omega} d\rho d\lambda = p \sum_{i=1}^8 \iint_{\Omega_i} d\rho d\lambda. \quad (6)$$

Вычислим, например, интеграл по треугольнику  $\Omega_1$

$$\iint_{\Omega_1} d\rho d\lambda = \int_0^{\lambda_1} d\lambda \int_0^{\frac{\rho_1}{\cos \lambda}} d\rho = \frac{H_1}{2} \ln \frac{1 + \sin \lambda_1}{1 - \sin \lambda_1}.$$

#### 4. Результаты

Выполняя интегрирование по каждому из треугольников  $\Omega_i$ , находим, что перемещение точек основания в перпендикулярном к плоскости рисунка направлении (Рис.3) определяется формулой:

$$w(x, y, 0) = \frac{m-1}{2\pi mG} p \cdot \sum_{i=1}^8 H_i \Lambda(\lambda_i), \quad (7)$$

где  $\Lambda(\lambda_i)$  - лямбда-функция, имеющая вид

$$\Lambda(\lambda_i) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \lambda_i}{1 - \sin \lambda_i}. \quad (8)$$

Обозначим  $\Delta_i = H_i \Lambda(\lambda_i)$ , тогда

$$w(x, y) = \frac{m-1}{2\pi mG} p \cdot \sum_{i=1}^8 \Delta_i \quad (9)$$

Получим формулу для определения осадки плоскости основания в произвольной его точке вне загруженного прямоугольника. Разобьем область вне прямоугольника на 8 частей, каждую из которых обозначим римскими цифрами, как это показано на Рис.4.

## Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317  
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582  
 GIF (Australia) = 0.564  
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
 ПИИЦ (Russia) = 0.191  
 ESJI (KZ) = 8.100  
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630  
 PIF (India) = 1.940  
 IBI (India) = 4.260  
 OAJI (USA) = 0.350

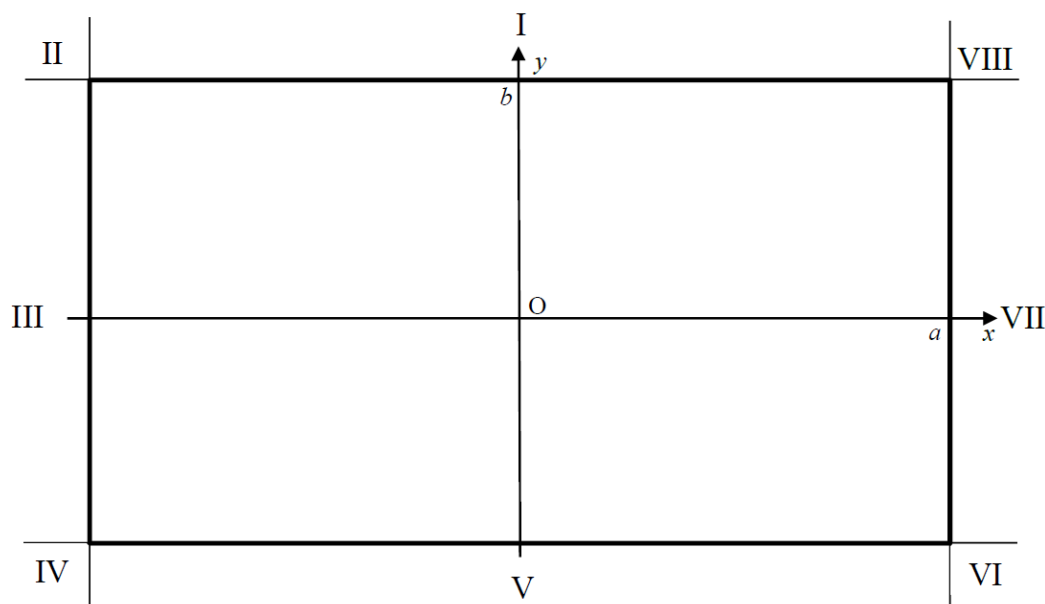


Рисунок 4. Деление плоскости на восемь частей снаружи прямоугольника нагружения.

Выберем начало координат в центре прямоугольника и направим оси  $x$  и  $y$  параллельно его сторонам и найдем интеграл (6) для каждой из восьми частей плоскости. Для случая, когда точка  $C(x, y)$  находится в I части плоскости возьмем обозначения, аналогичные сделанным ранее (Рис.5). Прделавав похожие действия в каждой из восьми частей плоскости получим:

$$w(x, y) = \frac{m-1}{2\pi mG} p \cdot S_K, \quad (10)$$

где  $K$  – номер части плоскости, содержащей точку  $C(x, y)$ . По структуре имеем формулы сходные с формулой (9), но вместо обычного суммирования значений  $\Delta_i$  имеем формулы для  $S_K$ , в которых  $\Delta_i$  не только складываются но и вычитаются. Конкретное выражение  $S_K$  зависит от той части плоскости, в которую попадает точка наблюдения. Выражения для  $S_K$  будут иметь следующий вид:

1) для I части плоскости ( $-a \leq x \leq a$ ,  $y \geq b$ )

$$S_1 = -\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6 + \Delta_7 + \Delta_8;$$

2) для II части плоскости ( $x \leq -a$ ,  $y \geq b$ )

$$S_2 = -\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4 - \Delta_5 - \Delta_6 + \Delta_7 + \Delta_8;$$

3) для III части плоскости ( $x \leq -a$ ,  $-b \leq y \leq b$ )

$$S_3 = \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4 - \Delta_5 - \Delta_6 + \Delta_7 + \Delta_8;$$

4) для IV части плоскости ( $x \leq -a$ ,  $y \leq -b$ )

$$S_4 = \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4 - \Delta_5 - \Delta_6 - \Delta_7 - \Delta_8;$$

5) для V части плоскости ( $-a \leq x \leq a$ ,  $y \leq -b$ )

$$S_5 = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 - \Delta_5 - \Delta_6 - \Delta_7 - \Delta_8;$$

6) для VI части плоскости ( $x \geq a$ ,  $y \leq -b$ )

$$S_6 = -\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 - \Delta_5 - \Delta_6 - \Delta_7 - \Delta_8;$$

7) для VII части плоскости ( $x \geq a$ ,  $-b \leq y \leq b$ )

$$S_7 = -\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6 - \Delta_7 - \Delta_8;$$

8) для VIII части плоскости ( $x \geq a$ ,  $y \geq b$ )

$$S_8 = -\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6 - \Delta_7 - \Delta_8.$$

**Impact Factor:**

ISRA (India) = 6.317  
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582  
 GIF (Australia) = 0.564  
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
 ПИИЦ (Russia) = 0.191  
 ESJI (KZ) = 8.100  
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630  
 PIF (India) = 1.940  
 IBI (India) = 4.260  
 OAJI (USA) = 0.350

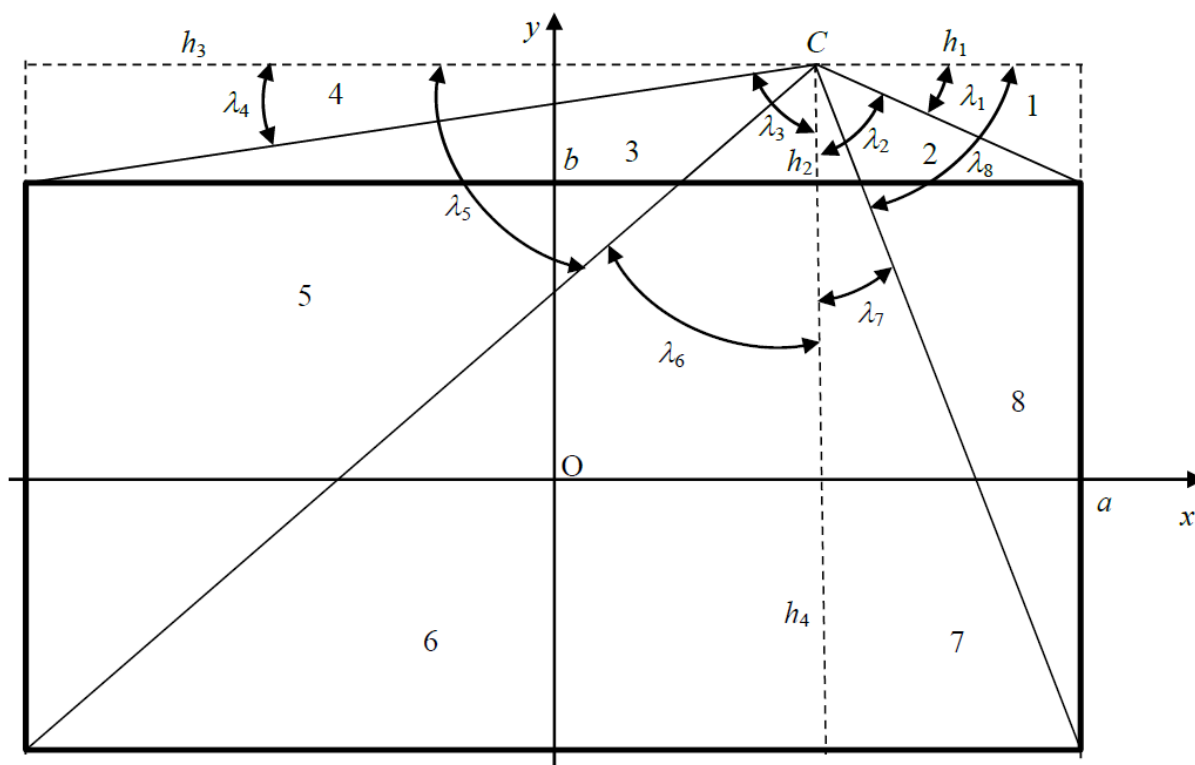


Рисунок 5. Точка наблюдения  $C(x, y)$  снаружи прямоугольника нагружения.

### 5. Заключение

В работе найдены выражения (9) и (10) для перемещения точек на границе упругого полупространства, причем как для точек внутри прямоугольника нагружения, так и снаружи этого прямоугольника. Аналогичным путем можно получить выражения для перемещения и напряжений во всем полупространстве, а не

только на граничной поверхности. Перемещения и напряжения можно находить подобным образом и для областей нагружения другой формы. Найденные соотношения могут быть использованы, например, в задачах о действии фундаментов заданий и сооружений на упругое основание.

### References:

1. Boussinesq, J. (1885). *Application des Potentiels à l'Étude de l'Équilibre et du Mouvement des Solides Elastiques*, Paris: Gauthier-Villars.
2. Love, A.E.H. (1935). *Matematicheskaya teoriya uprugosti*, M.-L., ONTI.
3. Timoshenko, S.P., & Gud'er, Dzh. (1975). *Teoriya uprugosti*, M.: Nauka.
4. Novackij, V. (1975) *Teoriya uprugosti*, M.: Mir.
5. Lur'e, A.I. (1955) *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti*. M.: GITTL.
6. Love, A.E.H. (1929). *The stress produced in a semi-infinite solid by pressure on part of the boundary*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 228, 377–420.
7. Lamb, H., (1902). On Boussinesq's problem, *Proc. London Math. Soc.*, 34, 276–284.
8. Sneddon, I.N. (1946). The elastic stresses produced in a thick plate by the application of pressure to its free surfaces, *Math. Proc. of the Cambridge Phil. Soc.*, 42, 3, 260 – 271.
9. Zhemochkin, B.N., & Sinicin, A.P. (1962) *Prakticheskie metody rascheta fundamentykh balok i plit na uprugom osnovanii*. M.: Gosstrojizdat.

<b>Impact Factor:</b>	<b>ISRA (India) = 6.317</b>	<b>SIS (USA) = 0.912</b>	<b>ICV (Poland) = 6.630</b>
	<b>ISI (Dubai, UAE) = 1.582</b>	<b>ПИИИ (Russia) = 0.191</b>	<b>PIF (India) = 1.940</b>
	<b>GIF (Australia) = 0.564</b>	<b>ESJI (KZ) = 8.100</b>	<b>IBI (India) = 4.260</b>
	<b>JIF = 1.500</b>	<b>SJIF (Morocco) = 7.184</b>	<b>OAJI (USA) = 0.350</b>

---

10. Bosakov, S.V. (2020) K resheniyu kontaktnoj zadachi dlya pryamougol'noj plastinki na uprugom poluprostranstve, *Nauka i tekhnika*, 19, 3. 224 - 229.