

Impact Factor:	ISRA (India)	= 6.317	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
	ISI (Dubai, UAE)	= 1.582	ПИИЦ (Russia)	= 0.191	PIF (India)	= 1.940
	GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.100	IBI (India)	= 4.260
	JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 7.184	OAJI (USA)	= 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2024 Issue: 11 Volume: 139

Published: 26.11.2024 <http://T-Science.org>

Issue

Article



Igor Sergeevich Kazei

Bauman Moscow State Technical University
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
associate professor, Moscow, Russia
ikazey@bmstu.ru

Victoria Vyacheslavovna Kazei

Bauman Moscow State Technical University
Senior Lecturer, Moscow, Russia
viktoria@bmstu.ru

MATHEMATICAL MODELS OF BRIDGE FLUTTER UNDER UNSTATIONARY WIND FLOW

Abstract: The article considers mathematical models of bending-torsional flutter of a bridge with non-stationary wind flow. The problem statement is similar to the problem of wing flutter with flow around a rigid and thin plate, but for the boundary condition of hinged support. Non-stationary flow around a bridge is modeled using the Theodorsen and Scanlan models. Using examples of various bridges, it is shown that non-stationary flow models give a picture closer to reality.

Key words: aeroelasticity, bridge flutter, wind flow, thin plate, aerodynamic coefficients.

Language: Russian

Citation: Kazei, I.S., & Kazei, V.V. (2024). Mathematical models of bridge flutter under unstationary wind flow. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 11 (139), 368-372.

Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-11-139-39> **Doi:**  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2024.11.139.39>

Scopus ASCC: 2610.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФЛАТТЕРА МОСТА ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ОБТЕКАНИИ ВЕТРОВЫМ ПОТОКОМ

Аннотация: В статье рассматривается математическая модель изгибно-крутильного флаттера моста при нестационарном обтекании ветровым потоком. Постановка задачи аналогична задаче о флаттере крыла при обтекании жесткой и тонкой пластины, но для граничного условия шарнирного опирания. Нестационарное обтекание моста моделируется при помощи моделей Теодорсена и Скэнлана. На примерах различных мостов показано, что модели нестационарного обтекания дают картину более близкую к реальности.

Ключевые слова: аэроупругость, флаттер моста, ветровой поток, тонкая пластина, аэродинамические коэффициенты.

Введение

Воздействие ветра на мосты с большими пролётами может быть существенным. Ветровая нагрузка оказывает значительное влияние на напряжённо-деформированное состояние моста и его надёжность.

Если тело в воздушном потоке отклоняется под действием некоторой силы, а затем это

начальное смещение вызывает последующие отклонения, носящие колебательный характер или характер возрастающих движений во времени, то говорят о возникновении аэроупругой неустойчивости.

Большепролётные вантовые и висячие мосты особенно подвержены аэроупругой неустойчивости. В этой статье мы рассмотрим

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИНЦ (Russia) = 0.191
 ESJI (KZ) = 8.100
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

математическую модель изгибно-крутильного флаттера моста, которая представляет собой балку с шарнирным опиранием в набегающем потоке воздуха.

Работа над проблемами аэродинамической неустойчивости самолета и отдельных его элементов началась еще в 30-х годах XX века. Здесь можно указать, например, на работу Е.П. Гроссмана [1]. Позже были написаны классические труды [2-5] подробно освещающие различные аспекты данной проблемы. Сильное влияние на интерес к изучению флаттера мостов оказала знаменитая катастрофа моста Такома-Нарроуз в США (1940г). Э. Симиу и Р. Сканлан свою книгу [6] посвятили вопросам влияния ветровой нагрузки на здания и сооружения. Большое внимание здесь уделено именно мостовым конструкциям. Вопросы построения алгоритмов вычисления критической скорости флаттера мостов обсуждены в [7-10].

2. Постановка задачи

Рассмотрим шарнирно опертую по концам балку, моделирующую мост, которая имеет длину l и ширину b . Мост находится в набегающем потоке воздуха скорости v . Система уравнений, следуя [5] и [10], имеет вид

$$\begin{cases} EI \frac{\partial^4 h}{\partial y^4} + m \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + L = 0, \\ GJ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} - I_\alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + M = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где EI - изгибная жесткость моста, GJ - крутильная жесткость моста, I_α - массовый момент инерции около упругой оси, m - распределенная масса на единицу длины, L - аэродинамическая сила, M - аэродинамический момент, $h = h(y, t)$ - вертикальное перемещение, $\alpha = \alpha(y, t)$ - угол поворота вокруг упругой оси. Все константы предполагаются постоянными.

Граничные условия:

$$h(0, t) = h(l, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0, t) = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(l, t) = 0, \\ \alpha(0, t) = \alpha(l, t) = 0. \quad (2)$$

Выражения для аэродинамической силы и момента возьмем в виде:

$$L = \frac{\rho v^2}{2} b \left(C_1 \frac{1}{v} \frac{\partial h}{\partial t} + C_2 \frac{1}{v} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + C_3 \alpha \right), \quad (3)$$

$$M = \frac{\rho v^2}{2} b^2 \left(C_4 \frac{1}{v} \frac{\partial h}{\partial t} + C_5 \frac{1}{v} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + C_6 \alpha \right), \quad (4)$$

В формулах (3) и (4) использованы числовые константы: ρ - плотность воздуха, v - скорость набегающего потока, C_i ($i = 1, \dots, 6$) - аэродинамические коэффициенты, выбираемые по нестационарной теории.

Первые разработки нестационарной теории флаттера для нужд аэронавтики были сделаны Т. Теодорсеном и относятся к 1935 году. При помощи функции Теодорсена на основе теории тонкой пластины Сканлан получил для мостов аналитические выражения для C_i [9]:

$$C_1 = -2\pi F(k), \quad C_2 = -\pi \left(\frac{1+F(k)}{2} + \frac{2G(k)}{k} \right) b,$$

$$C_3 = -\pi \left(2F(k) + \frac{kG(k)}{k} \right), \quad C_4 = \frac{\pi}{2} F(k),$$

$$C_5 = \pi \left(\frac{F(k)-1}{8} + \frac{G(k)}{2k} \right) b,$$

$$C_6 = \pi \left(\frac{F(k)}{2} - \frac{kG(k)}{8} + \frac{1}{32} \right),$$

где $k = \frac{Sh}{2}$ - приведенная частота, $Sh = \frac{\omega b}{v}$ -

число Струхала, $Sh = \frac{\omega b}{v}$ - частота и скорость

ветра (искомые параметры), $F(k)$ и $G(k)$ - действительная и мнимая части функции Теодорсена $C(k) = F(k) + iG(k)$.

$$F(k) = \frac{J_1(k)(J_1(k) + Y_0(k)) + Y_1(k)(Y_1(k) + J_0(k))}{(Y_1(k) - J_0(k))^2 + (J_1(k) + Y_0(k))^2};$$

$$G(k) = \frac{J_0(k)J_1(k) + Y_0(k)Y_1(k)}{(Y_1(k) - J_0(k))^2 + (J_1(k) + Y_0(k))^2},$$

где $J_0(k)$ и $J_1(k)$ - функции Бесселя первого рода, $Y_0(k)$ и $Y_1(k)$ - функции Бесселя второго рода. Назовем эту модель - моделью Теодорсена.

Следующим шагом Сканлана был отказ от функции Теодорсена и перенос тяжести исследования на подбор коэффициентов в формулах (3) и (4) при помощи натурных испытаний. Модель Сканлана предполагает, что

$$C_1 = kH_1^*, \quad C_2 = kH_2^*b, \quad C_3 = k^2H_3^*,$$

$$C_4 = kA_1^*, \quad C_5 = kA_2^*b, \quad C_6 = k^2A_3^*,$$

где A_i^* и H_i^* ($i = 1, 2, 3$) - экспериментально определяемые константы, называемые производными Сканлана.

Аэродинамические производные Сканлана для плохообтекаемых объектов не могут быть вычислены аналитически, однако их можно получить путем экспериментальных исследований

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИНЦ (Russia) = 0.191
 ESJI (KZ) = 8.100
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

в аэродинамической трубе или с помощью численного моделирования. Модель Сканлана широко используется для решения задач аэроупругой устойчивости мостов благодаря ее способности применяться к различным типам поперечных сечений мостов [8].

3. Метод решения задачи

Нахождение критической скорости флаттера, производится при помощи стандартной процедуры алгоритма метода Бубнова – Галеркина, описанной в [5], [10]. В уравнения (1) подставим выражения (3), (4), где коэффициенты C_i берутся из нестационарной модели Теодорсена, либо из нестационарной модели Сканлана:

$$\begin{cases} EI \frac{\partial^4 h}{\partial y^4} + m \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \\ + \frac{\rho v^2}{2} b \left(C_1 \frac{1}{v} \frac{\partial h}{\partial t} + C_2 \frac{1}{v} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + C_3 \alpha \right) = 0, \\ GJ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} - I_\alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \\ + \frac{\rho v^2}{2} b^2 \left(C_4 \frac{1}{v} \frac{\partial h}{\partial t} + C_5 \frac{1}{v} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + C_6 \alpha \right) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

Решение системы (5) ищем в форме

$$h = A f(y) e^{\lambda t}, \quad \alpha = B \varphi(y) e^{\lambda t}, \quad (6)$$

где $\lambda = p + i\omega$, A и B - константы.

Случай $p = 0$ и $\omega \neq 0$ соответствует критической скорости флаттера.

Опуская подробности алгоритма, представленные в работе [10], опишем полученные результаты.

Критическая скорость ищется из формулы

$$v^2 = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - 4LN}}{2L}, \quad (7)$$

где L , M , N – константы, зависящие от форм собственных колебаний $f(y)$, $\varphi(y)$ и коэффициентов C_i ($i=1, \dots, 6$).

Следует отметить, что знак перед корнем выбирается из условия получения наименьшего положительного значения v^2 .

4. Результаты

Результаты вычислений приведем скорости флаттера приведем для трех мостов и трех моделей (где это было возможно по наличию исходных данных).

1) Мост Такома – Нэрроуз в США (рис.1).

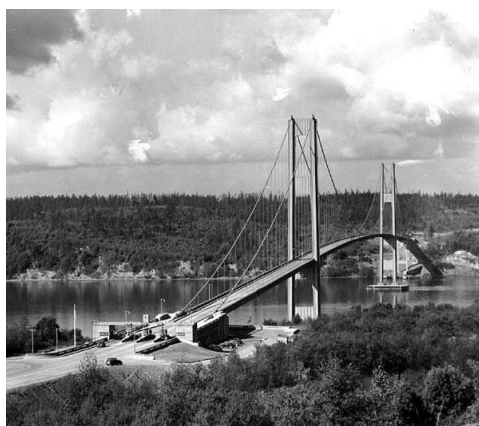


Рисунок 1. Мост Такома-Нэрроуз в США.

Исходные данные возьмем из статьи [10]:

$$EI = 2,33 \cdot 10^5 \text{ H} \cdot \text{м}^2,$$

$$GJ = 9,32 \cdot 10^9 \text{ H} \cdot \text{м}^2, \quad m = 8482,67 \text{ кг} / \text{м},$$

$$I_\alpha = 800000 \text{ кг} \cdot \text{м}, \quad b = 11,89 \text{ м}, \quad l = 853 \text{ м},$$

$$\rho = 1,2250 \text{ кг} / \text{м}^3.$$

Скорость ветра, при которой зафиксировано разрушение моста Такома - Нэрроуз, равна примерно $18 \text{ м} / \text{с}$.

Результат вычисления скорости флаттера моста Такома - Нэрроуз по стационарной модели [10]: $v_\phi = 22,7 \text{ м} / \text{с}$. Модель Теодорсена дает при этом скорость $v_\phi = 16,6 \text{ м} / \text{с}$.

2) Висячий кабельный мост «Аскей» в Норвегии (рис.2)

$$EI = 21966896 \cdot 10^8 \text{ H} \cdot \text{м}^2,$$

$$GJ = 70411747 \cdot 10^7 \text{ H} \cdot \text{м}^2,$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
РИИЦ (Russia) = 0.191
ESJI (KZ) = 8.100
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

$$m = 6962,7215 \text{ кг} / \text{м},$$

$$I_{\alpha} = 160436794 \text{ кг} \cdot \text{м},$$

$$b = 15,5 \text{ м}, l = 852,5 \text{ м}, \rho = 1,2250 \text{ кг} / \text{м}^3.$$



Рисунок 2. Мост «Аскей» в Норвегии.

Вычисления критической скорости флаттера дали здесь следующие результаты:

по стационарной модели [10] $v_{\phi} = 134,9 \text{ м} / \text{с}$;

по модели Теодорсена $v_{\phi} = 117,3 \text{ м} / \text{с}$;

по модели Сканлана $v_{\phi} = 116,7 \text{ м} / \text{с}$.

3) Для вантового моста «Нормандия» во Франции:

$$EI = 348136075 \cdot 10^8 \text{ Н} \cdot \text{м}^2,$$

$$GJ = 16475172 \cdot 10^7 \text{ Н} \cdot \text{м}^2,$$

$$m = 11767,98 \text{ кг} / \text{м}, I_{\alpha} = 3305821715 \text{ кг} \cdot \text{м},$$

$$b = 22 \text{ м}, l = 836 \text{ м}, \rho = 1,2250 \text{ кг} / \text{м}^3.$$



Рисунок 3. Мост «Нормандия» во Франции.

Вычисления критической скорости флаттера дали для этого моста следующие результаты:

по стационарной модели [10] $v_{\phi} = 55,6 \text{ м} / \text{с}$;

по модели Теодорсена $v_{\phi} = 44,5 \text{ м} / \text{с}$;

по модели Сканлана $v_{\phi} = 43,5 \text{ м} / \text{с}$.

5. Заключение

Анализ полученных результатов показывает, что мост Такома-Нэрроуз обладал самой слабой

аэродинамической устойчивостью из трех исследуемых мостов. 18 м/с это зафиксированная скорость ветра при разрушении, а реальный процесс «раскачки» амплитуды начался при более низких скоростях. Модель Теодорсена дает значение критической скорости 16,6 м/с. В классической стационарной теории предполагается отсутствие в потоке сил трения и отсутствие вихрей. Ветровые воздействия на мостовые сооружения не вполне корректно описываются стационарной теорией, поскольку

Impact Factor:	ISRA (India)	= 6.317	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
	ISI (Dubai, UAE)	= 1.582	РИИЦ (Russia)	= 0.191	PIF (India)	= 1.940
	GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.100	IBI (India)	= 4.260
	JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 7.184	OAJI (USA)	= 0.350

они приводят к образованию вихрей и срыву их с поверхности. Каждая из двух нестационарных моделей имеет свои плюсы.

Модель Теодорсена позволяет воспользоваться аналитическими выражениями, учитывающими эффекты нестационарности и уточнить скорость флаттера.

Идея модели Скэнлана состоит в подборе коэффициентов при помощи натурных испытаний для конкретного моста или типа сечения. Альтернативой натурным экспериментам может быть компьютерное моделирование нужных коэффициентов.

References:

1. Grossman, E.P. (1940). *Kurs vibracij chastej samoleta*. – M.: Oborongiz.
2. Lamper, R.E. (1990). *Vvedenie v teoriyu flattera*. –M.: Mashinostroenie.
3. Fershing, G.V. (1984). *Osnovy aerouprugosti*. – M.: Mashinostroenie.
4. Bisplinghoff, R.L., Ashley, H., & Halfman, R.L. (1955). *Aeroelasticity*. Addison-Wesley Publishing Company, Cambridge.
5. Fung, Y.C. (1993). *An introduction to the theory of aeroelasticity*. Dover Publications, Inc, New York.
6. Simiu, E., & Scanlan, R.H. (1978). *Wind effects on Structures: An introduction to wind engineering*. John Wiley & Sons, Inc. New York.
7. Meirovitch, L. (1987) Control of flutter in bridges. *Journal of Engineering Mechanics*, 5(113), 720-736/
8. Scanlan, R.H., & Tomko, J.J. (1971) Airfoil and bridge deck flutter derivatives. *Journal Engineering Mechanics*, 6(97),1717–1737.
9. Xu, X. (2009) Parametric studies on relationships between flutter derivatives of slender bridge. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2(30), 237–245.
10. Kazei, I.S. (2024). A mathematical model of the bridge flutter in case of stationary wind flow. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 07(135), 23-27.