

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2025 Issue: 01 Volume: 141

Published: 05.01.2025 <http://T-Science.org>

Issue

Article



Gennady Evgenievich Markelov
 Bauman Moscow State Technical University
 Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor,
 Academician of International Academy of Theoretical and Applied Sciences
 Moscow, Russia
markelov@bmstu.ru

A MATHEMATICAL MODEL OF AN ELECTROTHERMAL SYSTEM ELEMENT

Abstract: A mathematical model of an element of an electrothermal system has been obtained using the principled approach. The element of the electrothermal system includes a thermistor. Resistance of the thermistor depends on its temperature in the temperature range under consideration. The built mathematical model possesses the properties of fullness, adequacy, productivity and economy to a sufficient degree. The use of such a model reduces the time and money spent on conducting research and enables the rational use of mathematical modeling capabilities.

Key words: thermistor, mathematical model, properties of mathematical models, principled approach.

Language: Russian

Citation: Markelov, G.E. (2025). A mathematical model of an electrothermal system element. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 01 (141), 20-23.

Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-01-141-4> **Doi:** <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2025.01.141.4>

Scopus ASCC: 2604.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕМЕНТА ЭЛЕКТРОТЕПЛОВОЙ СИСТЕМЫ

Аннотация: Получена математическая модель элемента электротепловой системы с использованием принципиального подхода. Элемент электротепловой системы включает терморезистор, сопротивление которого зависит от температуры терморезистора в рассматриваемом диапазоне температур. Построенная математическая модель в достаточной мере обладает свойствами полноты, адекватности, продуктивности и экономичности. Применение такой модели сокращает затраты времени и средств на проведение исследования, позволяет рационально использовать возможности математического моделирования.

Ключевые слова: терморезистор, математическая модель, свойства математических моделей, принципиальный подход.

Введение

Подходы к построению математических моделей различных электротепловых систем изложены в обширной учебной и научной литературе. В настоящее время изучены основные принципы работы терморезисторов, установлены их технические характеристики, рассмотрены способы расчета схем с терморезисторами, известны многочисленные примеры их успешного практического использования в различных областях человеческой деятельности.

В работе [1] уточнено понятие «математическое моделирование», которое определено как замена объекта исследования пригодной математической моделью и ее последующее изучение известными методами, способами, причем математическая модель является пригодной, если она в достаточной мере обладает нужными свойствами применительно к конкретному исследованию. Некоторые свойства математических моделей приведены, например, в работах [1; 2]. Совокупность этих свойств определяет предъявляемые к математической

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
РИИЦ (Russia) = 0.191
ESJI (KZ) = 8.100
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

модели требования. Такие требования противоречивы и на практике могут быть удовлетворены на основе разумного компромисса, для достижения которого обычно соблюдают правила и выполняют рекомендации, полученные в результате обобщения практического опыта, накопленного при построении математических моделей (см., например, [2–4]). В работе [5] рассмотрен пример построения математической модели, в достаточной мере обладающей нужными свойствами применительно к исследованию, некоторые результаты которого изложены в работах [6; 7]. Особенности внедрения принципиального подхода к построению математических моделей рассмотрены в работах [8–11].

Целью настоящей работы является разработка пригодной математической модели элемента электротепловой системы с использованием принципиального подхода. Элемент электротепловой системы включает терморезистор, сопротивление которого зависит от его температуры.

Постановка задачи

Пусть T — температура терморезистора, которая не зависит от пространственных координат. Температура T в начальный момент времени t_0 равна T_0 . Полная теплоемкость терморезистора равна постоянной величине C . На поверхности терморезистора площадью S происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой равна T_0 , коэффициент теплоотдачи известен и равен α . Для диапазона температур от T_0 до T^* считаем, что сопротивление терморезистора равно

$$R(T) = \frac{r}{1 + \beta(T - T_0)},$$

где r — сопротивление терморезистора при $T = T_0$; β — температурный коэффициент, причем $\beta > 0$. Разность электрических потенциалов на полюсах рассматриваемого элемента равна

$$U = \frac{rI}{1 + \beta(T - T_0)}, \quad (1)$$

где I — сила постоянного электрического тока, протекающего через терморезистор.

Пусть в рамках проводимого исследования представляет интерес разность электрических потенциалов U . Построим математическую модель объекта исследования, которая в достаточной мере обладает свойствами полноты, адекватности, продуктивности и экономичности.

Решение

Согласно принципу постепенного усложнения для решения поставленной задачи выстроим иерархию математических моделей данного объекта исследования и определим условия, при выполнении которых можно с относительной погрешностью не более заданного значения δ_0 найти искомую величину U .

Если разность $T - T_0$ достаточно мала, то согласно (1) найдем искомую величину по формуле

$$U_0 = rI. \quad (2)$$

Определим условия, при которых применима полученная формула. Для этого рассмотрим установившийся процесс теплообмена. В этом случае мощность тепловыделения в материале терморезистора равна тепловому потоку, отводимому от терморезистора, т. е.

$$\frac{IU_0}{1 + \beta(T_* - T_0)} = \alpha(T_* - T_0)S,$$

где T_* — установившееся значение температуры терморезистора, причем $T_* \leq T^*$. Из полученного равенства легко найти

$$T_* = T_0 + \frac{1}{2\beta} \left(-1 + \sqrt{1 + 4\beta IU_0 / (\alpha S)} \right),$$

а затем определить установившееся значение

$$U_* = R(T_*)I = \frac{2U_0}{1 + \sqrt{1 + 4\beta IU_0 / (\alpha S)}}. \quad (3)$$

Очевидно, что $U_* \leq U \leq U_0$. Тогда для относительной погрешности величины U_0 запишем

$$\delta(U_0) = \left| \frac{U - U_0}{U} \right| = \frac{U_0}{U} - 1 \leq \frac{U_0}{U_*} - 1.$$

Следовательно, при выполнении условия

$$\frac{U_0}{U_*} - 1 \leq \delta_0$$

можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (2) для нахождения искомой величины. Тогда приходим к неравенству

$$\beta IU_0 / (\alpha S) \leq \delta_0^2 + \delta_0. \quad (4)$$

При выполнении этого неравенства математическая модель (2) в достаточной мере обладает свойствами полноты, адекватности, продуктивности и экономичности.

Определим условия, при которых применима математическая модель (3). Для этого рассмотрим неуставившийся процесс теплообмена. В этом случае изменение температуры терморезистора во времени t описывает обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

Impact Factor:	ISRA (India)	= 6.317	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
	ISI (Dubai, UAE)	= 1.582	РИИЦ (Russia)	= 0.191	PIF (India)	= 1.940
	GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.100	IBI (India)	= 4.260
	JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 7.184	OAJI (USA)	= 0.350

$$C \frac{dT}{dt} = \frac{IU_0}{1+\beta(T-T_0)} - \alpha(T-T_0)S,$$

а начальное условие имеет вид

$$T(t_0) = T_0.$$

Учитывая, что

$$U = \frac{U_0}{1+\beta(T-T_0)},$$

сформулируем задачу Коши

$$\frac{dU}{dt} = \frac{U}{CU_0} [\alpha S(U_0 - U) - \beta IU^2], \quad (5)$$

$$U(t_0) = U_0.$$

При выполнении условия

$$\delta(U_*) = \left| \frac{U - U_*}{U} \right| = 1 - \frac{U_*}{U} \leq \delta_0$$

можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (3) для нахождения искомой величины, причем

$$\delta_0 < \frac{U_0}{U_*} - 1,$$

так как в противном случае следует применять формулу (2). Затем найдем момент времени

$$t_* = t_0 + \frac{C}{\alpha S} \left[\left(\frac{U_0}{2U_0 - U_*} - 1 \right) \ln \left(2 - \frac{U_*}{U_0} - \delta_0 \right) - \frac{U_0}{2U_0 - U_*} \ln \left(\frac{U_0}{U_0 - U_*} \delta_0 \right) \right],$$

для которого $U(t_*) = U_*/(1 - \delta_0)$. Тогда согласно (5) установившееся значение U_* можно с относительной погрешностью не более δ_0 считать равным $U(t)$ при $t \geq t_*$.

Если не выполнено условие (4), то математическая модель (3) при $t \geq t_*$ в достаточной мере обладает свойствами полноты, адекватности, продуктивности и экономичности.

Разработка новой математической модели при формировании иерархии математических моделей объекта исследования может привести к уточнению найденных ранее условий применимости построенных математических моделей. Действительно, используя математическую модель (5), можно уточнить условие применимости формулы (2). Для этого найдем момент времени

$$t^* = t_0 + \frac{C}{\alpha S} \left[\left(\frac{U_0}{2U_0 - U_*} - 1 \right) \ln \left(1 + \frac{U_*}{U_0} \delta_0 \right) - \frac{U_0}{2U_0 - U_*} \ln \left(1 - \frac{U_*}{U_0 - U_*} \delta_0 \right) \right],$$

для которого $U(t^*) = U_0/(1 + \delta_0)$. Тогда значение U_0 можно с относительной погрешностью не более δ_0 считать равным $U(t)$ при $t_0 \leq t \leq t^*$.

Если выполнено условие (4) или $t \leq t^*$, то математическая модель (2) в достаточной мере обладает свойствами полноты, адекватности, продуктивности и экономичности.

Результаты

Для диапазона температур от T_0 до T_* справедливы следующие утверждения, которые позволяют выявить пригодную математическую модель объекта исследования.

Утверждение 1. Если выполняется неравенство (4) или $t \leq t^*$, то математическую модель (2) считаем пригодной.

Утверждение 2. Если не выполнено условие (4), то при $t \geq t_*$ выбираем математическую модель (3) как пригодную.

Утверждение 3. Если не выполняется неравенство (4), а временной интервал от t^* до t_* представляет интерес, то математическую модель (5) считаем пригодной.

Заключение

Таким образом, в рамках используемого подхода сформулированы утверждения, которые позволяют установить пригодную математическую модель элемента электротепловой системы. Построенная математическая модель в достаточной мере обладает свойствами полноты, адекватности, продуктивности и экономичности применительно к данному исследованию.

Очевидно, что применение такой модели приводит к сокращению затрат времени и средств на проведение исследования, позволяет рационально использовать возможности математического моделирования.

References:

1. Markelov, G. E. (2024). Aspects of teaching mathematical modeling. *ISJ Theoretical &*

Applied Science, 02(130), 17–25.
<https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2024.02.130.3>

Impact Factor:	ISRA (India)	= 6.317	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
	ISI (Dubai, UAE)	= 1.582	ПИИИ (Russia)	= 0.191	PIF (India)	= 1.940
	GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.100	IBI (India)	= 4.260
	JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 7.184	OAJI (USA)	= 0.350

2. Markelov, G. Ye. (2005). Basic Principles to Construct Mathematical Models. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 04(19), 59–70.
3. Samarskii, A. A., & Mikhailov, A. P. (2002). *Principles of Mathematical Modeling: Ideas, Methods, Examples*. Taylor & Francis.
4. Dym, C. L. (2004). *Principles of Mathematical Modeling*. Elsevier Academic Press.
5. Markelov, G. E. (2012). Peculiarities of Construction of Mathematical Models. *Engineering Journal: Science and Innovation*, 04(4). <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2012-4-150>
6. Markelov, G. E. (2000). Effect of initial heating of the jet-forming layer of shaped-charge liners on the ultimate elongation of jet elements. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 02(41), 231–234. <https://doi.org/10.1007/BF02465262>
7. Markelov, G. E. (2000). Effect of initial heating of shaped charge liners on shaped charge penetration. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 05(41), 788–791. <https://doi.org/10.1007/BF02468723>
8. Markelov, G. E. (2021). A mathematical model of an NTC thermistor. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 01(93), 55–58. <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2021.01.93.9>
9. Markelov, G. E. (2021). A working mathematical model of an PTC thermistor. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 02(94), 1–4. <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2021.02.94.1>
10. Markelov, G. E. (2022). Serial connection of NTC thermistors. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 01(105), 259–262. <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2022.01.105.12>
11. Markelov, G. E. (2022). Parallel connection of PTC thermistors. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 02(106), 1–4. <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2022.02.106.1>