

Impact Factor:	ISRA (India)	= 6.317	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
	ISI (Dubai, UAE)	= 1.582	ПИИЦ (Russia)	= 0.191	PIF (India)	= 1.940
	GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.100	IBI (India)	= 4.260
	JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 7.184	OAJI (USA)	= 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2025 Issue: 06 Volume: 146

Received: 15.06.2025
Accepted/Published: 30.06.2025 <https://T-Science.org>

Issue

Article



Isroil Mirzaevich Karimov
Institute of Chemistry and Technology
docent, Tashkent, Uzbekistan

Utkir Abdunazar ugli Urolov
Institute of Chemistry and Technology
doctorant, Tashkent, Uzbekistan
legolas0810@mail.ru

Nurillo Raximovich Kulmurov
Navoi State Mining and Technological University
docent, Uzbekistan
nurillo.Kulmurov.64@mail.ru

MOVEMENT OF AN INDENTOR WITH A CONICAL HEAD IN A PRESSURE-PLASTIC INCOMPRESSIBLE MEDIUM

Abstract: An analytical formula for determining the maximum penetration depth of an indenter with a conical head of the final solution, possessing initial velocity, into an incompressible elastic-plastic medium is presented. The obtained result is compared with the numerical solution known from the literature and experimental data.

Key words: Indentor, cone, incompressible elastic-plastic medium, particle trajectories, Lamé coefficients, equation of motion, Hooke's law, Tresca's plasticity condition, pressure on the cone surface, maximum depth formula

Language: Russian

Citation: Karimov, I.M., Urolov, U.A., & Kulmurov, N.R. (2025). Movement of an indenter with a conical head in a pressure-plastic incompressible medium. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 06 (146), 55-58.

Soi: <https://s-o-i.org/1.1/TAS-06-146-11> **Doi:** <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2025.06.146.11>

Scopus ASCC: 2200.

ДВИЖЕНИЕ ИНДЕНТОРА С КОНИЧЕСКОЙ ГОЛОВНОЙ ЧАСТЬЮ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДЕ

Аннотация: Приведена аналитическая формула для определения максимальной глубины проникновения индентора с конической головной частью конечного раствора, обладающего начальной скоростью, в несжимаемую упругопластическую среду. Полученный результат сопоставлен с численным решением, известным из литературы, и с экспериментальными данными.

Ключевые слова: Индентор, конус, несжимаемая упругопластическая среда, траектории частиц, коэффициенты Ламе, уравнение движения, закон Гука, условие пластичности Треска, давление на поверхности конуса, формула максимальной глубины.

Введение

Движение абсолютно твёрдого тела в деформируемой среде представляет собой сложный процесс, исследование которого является актуальной задачей механики сплошных сред. Развитие информационных технологий, в частности вычислительной техники, значительно

расширяет возможности применения численных методов решения при анализе подобных процессов. Наряду с этим, особое значение приобретает построение аналитических формул, описывающих движение тела на основе определённых допущений, что обеспечивает их практическое использование.

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
РИИЦ (Russia) = 0.191
ESJI (KZ) = 8.100
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

В настоящей работе принимаются гипотезы о несжимаемости деформируемой среды и о заданности траекторий движения её частиц. В литературе широко применяется гипотеза «плоских сечений», согласно которой частица, изначально лежащая в плоскости, после деформации остаётся в той же плоскости. При исследовании движения индентора с конической головной частью конечного раствора, используется допущение, что частицы среды перемещаются по коническим поверхностям, перпендикулярным поверхности конуса [1-3]. Деформация несжимаемой среды реализуется посредством сдвига [4,5].

Поскольку траектории движения частиц среды представляют собой совокупность конических поверхностей, вводится ортогональная криволинейная система координат (H_0, h_0, φ) [6]. В данной системе параметры H_0 и h_0 определяют мгновенные координаты вершины движущегося конуса и соответствующих траекторий частиц. Для используемой координатной системы параметры Ламе принимают следующие значения:

$$H_1 = \sin\beta, H_2 = \cos\beta, H_3 = (H_0 - h_0)\sin\beta\cos\beta,$$

Здесь β - угол полураствора конуса.

С учётом параметров Ламе в криволинейной системе координат уравнение движения частиц среды принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \sigma_{H_0}}{\partial H_0} + \frac{\sigma_{H_0} - \sigma_\varphi}{H_0 - h_0} = \rho \sin\beta \left(\frac{\partial v_{H_0}}{\partial t} + \frac{v_{H_0}}{\sin\beta} \cdot \frac{\partial v_{H_0}}{\partial H_0} \right),$$

где $\sigma_{H_0}, \sigma_\varphi$ - напряжение, ρ - плотность, v_{H_0} - скорость частицы.

Поскольку частицы движутся вдоль поверхности $h_0 = \text{const}$, условие несжимаемости среды записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial v_{H_0}}{\partial H_0} + \frac{v_{H_0}}{H_0 - h_0} = 0$$

Решение данного уравнения определяется выражением $v_{H_0} = \frac{\lambda(t)}{\eta}$, $(\eta = H_0 - h_0)$, где $\lambda(t)$ - функция, подлежащая определению.

С учётом выражения, определяющего скорость, уравнение движения принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \sigma_{H_0}}{\partial \eta} + \frac{\sigma_{H_0} - \sigma_\varphi}{\eta} = \rho \sin\beta \frac{\dot{\lambda}}{\eta} - \rho \frac{\lambda^2}{\eta^3}.$$

Данное уравнение применимо как в упругой, так и в пластической областях среды.

Закон Гука в упругой области с учётом условия несжимаемости выражается формулой:

$$\begin{cases} \sigma_{H_0} = -p_\infty + 2\mu \frac{1}{\sin\beta} \frac{\partial u_{H_0}}{\partial \eta}, \\ \sigma_{h_0} = -p_\infty, \\ \sigma_\varphi = -p_\infty + 2\mu \frac{1}{\sin\beta} \frac{u_{H_0}}{\eta}, \end{cases}$$

где μ - модуль сдвига, p_∞ - гидростатическое давление.

С учётом того, что на границе между упругой и пластической областями $(\eta = \eta_*)$ выполняется условие пластичности Треска [7,8] $\sigma_{H_0} - \sigma_\varphi = 2\tau_s$, (τ_s — предел текучести при сдвиге), закон Гука может быть выражен следующим образом:

$$\begin{cases} \sigma_{H_0} = -p_\infty - \tau_s \frac{\eta_*^2}{\eta^2}, \\ \sigma_{h_0} = -p_\infty, \\ \sigma_\varphi = -p_\infty + \tau_s \frac{\eta_*^2}{\eta^2}. \end{cases}$$

Теперь, проинтегрировав уравнение движения в пластической области с учётом условия Треска, определим напряжение $\sigma_{H_0}^{pl}$:

$$\sigma_{H_0}^{pl} = p_{pl} + 2\tau_s \ln\eta + \rho \sin\beta \lambda \ln\eta + \frac{1}{2} \rho \frac{\lambda^2}{\eta^2}$$

Здесь индекс pl указывает, что напряжение относится к пластической области. Используя условие непрерывности напряжения σ_{H_0} на границе упругой и пластической областей, определим p_{pl} , после чего напряжение $\sigma_{H_0}^{pl}$ в пластической области выражается следующим образом:

$$\sigma_{H_0}^{pl} = -p_\infty - \tau_s + 2\tau_s \ln \frac{\eta}{\eta_*} + \rho \sin\beta \lambda \ln \frac{\eta}{\eta_*} + \frac{1}{2} \rho \lambda^2 \left(\frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{\eta_*^2} \right).$$

Учитывая, что на границе между упругой и пластической областями упругая деформация сдвига принимает конечное значение γ_e , координата η_* , определяющая эту границу, выражается через координату поверхности конуса (η_k) следующим образом:

$$\eta_* = \sqrt{\gamma_e^{-1}} \eta_k = \sqrt{\mu/\tau_s} \eta_k.$$

Давление на поверхности конуса вычисляется по следующей формуле:

$$p_k = p_\infty + \tau_s + 2\tau_s \ln \sqrt{\frac{\mu}{\tau_s}} + \rho \sin^2\beta \left(\eta_k \ddot{\eta}_k + \dot{\eta}_k^2 \right) \ln \sqrt{\frac{\mu}{\tau_s}} - \frac{1}{2} \rho \eta^2 \sin^2\beta \left(1 - \frac{\tau_s}{\mu} \right)$$

Здесь использовано равенство $v_{H_0} = \eta_k \dot{\eta}_k \sin\beta$, вытекающее из условия непрерывности скорости v_{H_0} на поверхности конуса [9].

Полная сила сопротивления, оказываемая средой на коническую часть движущегося индентора, выражается через следующий интеграл (где r_0 - радиус основания конуса)

$$F = 2\pi \int_0^{2r_0/\sin\beta} (p_k - p_\infty) \frac{1}{4} \sin^2 2\beta \eta_k d\eta_k$$

После вычисления интеграла уравнение движения индентора может быть приведено к следующему виду:

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИНЦ (Russia) = 0.191
 ESJI (KZ) = 8.100
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

$$\left(\frac{m}{\pi r_0^2} + \frac{r_0}{3} \rho \cdot \lg \beta \cdot \ln \frac{\mu}{\tau_s}\right) \dot{H} + \frac{1}{2} \rho \sin^2 \beta \left(\ln \frac{\mu}{\tau_s} - 1 + \frac{\tau_s}{\mu}\right) \dot{H}^2 + \tau_s \left(1 + \ln \frac{\tau_s}{\mu}\right) = 0,$$

Здесь $m, \dot{H}, \ddot{H}$ - соответственно масса, скорость и ускорение индентора.

Путём введения обозначения $y = \dot{H}^2$ ($y' = 2\ddot{H}$) в дифференциальном уравнении второго порядка получаем дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y' + \varphi_1 y + \varphi_2 = 0,$$

$$\varphi_1 = \frac{\rho \sin^2 \beta \left(\ln \frac{\mu}{\tau_s} - 1 + \frac{\tau_s}{\mu}\right)}{\frac{m}{\pi r_0^2} + \frac{r_0}{3} \rho \cdot \lg \beta \cdot \ln \frac{\mu}{\tau_s}},$$

$$\varphi_2 = \frac{2\tau_s \left(1 + \ln \frac{\tau_s}{\mu}\right)}{\frac{m}{\pi r_0^2} + \frac{r_0}{3} \rho \cdot \lg \beta \cdot \ln \frac{\mu}{\tau_s}}.$$

Решение дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющее условию $\dot{H}(H=0) = v_0$, определяется следующим выражением:

$$\dot{H}^2 = \left(v_0^2 + \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) e^{-\varphi_1 H} - \frac{\varphi_2}{\varphi_1}.$$

Максимальная глубина проникания H_{max} индентора, приведённого в движение с начальной скоростью в упругопластическую среду определяется из условия $\dot{H}(H_{max}) = 0$:

$$H_{max} = \frac{r_0}{\lg \beta} + \frac{1}{\varphi_1} \ln \left(1 + \frac{\varphi_1}{\varphi_2} v_0^2\right).$$

Здесь используется допущение, что начальная скорость индентора, обладающего

высокой скоростью, практически не изменяется до полного погружения в среду (то есть до тех пор, пока основание конуса не сравняется со свободной поверхностью среды).

Результат, полученный с использованием аналитической формулы для определения максимальной глубины проникновения индентора, сравнивается с результатами численного метода решения, известного из литературы [10], и экспериментальными данными [11].

Конический индентор соударяется с преградой из технически чистого железа при начальной скорости 840 м/с. Масса индентора составляла 11 г, диаметр основания конуса $2r_0 = 0,8$ см. Плотность технически чистого железа $\rho = 7,85$ г/см³, динамический предел текучести - $\sigma_s = 2\tau_s = 720$ МПа, модуль сдвига - $\mu = 0,8 \cdot 10^5$ МПа.

При решении задачи методом численного моделирования [11] было установлено, что движущийся индентор останавливается на максимальной глубине 3,35 см.

В эксперименте [12] получен результат 3,20 см. При расчёте глубины H_{max} по предложенной аналитической формуле получено значение 3,144 см.

Таким образом, сопоставление полученных результатов демонстрирует, что предлагаемая аналитическая формула может быть эффективно применена для практического расчёта максимальной глубины проникания.

References:

1. Sagomonyan, A.Ya. (1974). *Pronikanie*. (300p.). Moscow: Izd-vo MGU.
2. Shemyakin, Ye.I. (1961). *Rasshirenie gazovoy polosti v nesjimaemoy uprugoplasticheskoy srede*. JPMTF, 1961, № 5, 91-99.
3. Gulidov, A.I. (1980). *Pronikanie tverdogo udarnika v deformiruemuyu pregradu*. Chislennye metody reshenie zadach teorii uprugosti i plastichnosti: Materialy VI vsesoyuz. konf, Novosibirsk, 1980, 1 ch, 58-69.
4. Vitman, F.F., & Stepanov, A.A. (1959). *Vliyanie skorosti deformirovaniya na soprotivleniya deformirovaniyu metallov pri skorostnykh udarov 102-105 m/s*. Nekotorye problemy prochnosti tverdogo tela. (386p.). M.-L.: Izd-vo AN SSSR.
5. Gerasimov, A.V., Mixaylov, V.N., & Surkov, V.G. (2006). *Udarное nagrujenie kombinirovannykh pregrad*. Mexanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy, 2006, T. 12, № 2, pp. 237-255.
6. Gerasimov, A.V., & Pashkov, S.V. (2004). *Chislennoe modelirovanie yestestvennogo drobleniya tverdyykh tel*. Fizicheskaya mezomexanika, 2004, T. 7, Spes. vip, Ch.1, pp.313-316.
7. Gerasimov, A.V., & Pashkov, S.V. (2005). *Modelirovanie yestestvennogo drobleniya tverdyykh tel pri udarnyykh i vzyryvnykh nagrujeniyax*. Ximicheskaya fizika, 2005, T. 24, № 11, pp.48-54.
8. Gerasimov, A.V., & Pashkov, S.V. (2013). *Chislennoe modelirovanie probitiya sloistyykh pregrad*. Mexanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy, 2013, T. 19, № 1, pp. 49-61.
9. Glazyrin, V.P., Trushkov, V.G., & Olshanskiy, A.B. (2002). *Probitie sloistyykh pregrad*,

Impact Factor:	ISRA (India)	= 6.317	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
	ISI (Dubai, UAE)	= 1.582	ПИИИ (Russia)	= 0.191	PIF (India)	= 1.940
	GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.100	IBI (India)	= 4.260
	JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 7.184	OAJI (USA)	= 0.350

- soderjashhix keramicheskie sloi. *Vychislitelnye tekhnologii*, 2002, T. 7, ch. 2, pp. 163-171.
10. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., & Elperin, T. (2005). Optimization of two-component composite armor against ballistic impact. *Composite Structures*, 2005, Vol. 69, pp. 89-94.
 11. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., & Elperin, T. (2009). Improved Florence model and optimization of two-component armor against single impact or two impacts. *Composite Structures*, 2009, Vol. 88, pp. 158-165.
 12. Mexonoshina, T.G., Sokovikov, M.A., Naymark, O.B., & Bayandin, Yu.V. (2015). Chislennoe modelirovanie dinamicheskogo kontaktnogo vzaimodeystviya udarnika i sloistoy pregrady. *Matematicheskoe modelirovanie v yestestvennyx naukax*, 2015, T.1, pp. 277-280.