

|                       |                         |                |                       |                |                     |                |
|-----------------------|-------------------------|----------------|-----------------------|----------------|---------------------|----------------|
| <b>Impact Factor:</b> | <b>ISRA (India)</b>     | <b>= 6.317</b> | <b>SIS (USA)</b>      | <b>= 0.912</b> | <b>ICV (Poland)</b> | <b>= 6.630</b> |
|                       | <b>ISI (Dubai, UAE)</b> | <b>= 1.582</b> | <b>PIIHQ (Russia)</b> | <b>= 0.191</b> | <b>PIF (India)</b>  | <b>= 1.940</b> |
|                       | <b>GIF (Australia)</b>  | <b>= 0.564</b> | <b>ESJI (KZ)</b>      | <b>= 8.100</b> | <b>IBI (India)</b>  | <b>= 4.260</b> |
|                       | <b>JIF</b>              | <b>= 1.500</b> | <b>SJIF (Morocco)</b> | <b>= 7.184</b> | <b>OAJI (USA)</b>   | <b>= 0.350</b> |
|                       |                         |                |                       |                |                     |                |

SOI: [1.1/TAS](https://s-o-i.org/1.1/TAS) DOI: [10.15863/TAS](https://dx.doi.org/10.15863/TAS)

**International Scientific Journal**  
**Theoretical & Applied Science**

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2025 Issue: 11 Volume: 151

Received: 17.11.2025  
Accepted/Published: 30.11.2025 <https://T-Science.org>

Issue

Article



**Ma'mura Oman qizi Musurmonova**  
Shakhrisabz State Pedagogical Institute  
Senior Lecturer to Department of Mathematics  
and Information Technology in Education, dotsent,  
Shakhrisabz, Uzbekistan

**Abdulla Uyg'un o'g'li Jabborov**  
Karshi State University  
PhD student to Department of Applied mathematics  
Karshi, Uzbekistan  
[abdullajabborov1709@gmail.com](mailto:abdullajabborov1709@gmail.com)

**Elbek Abdiqodir o'g'li Musurmonov**  
Karshi State University  
master's student to Department of Applied mathematics,  
Karshi, Uzbekistan

## UNSTATIONARY OSCILLATIONS OF ACOUSTIC SPACE WITH A SPHERICAL CAVITY AND A RIGID SPHERE

**Abstract:** The problems of propagation and diffraction of non-stationary waves in acoustic and elastic media are of great theoretical and practical importance in such fields of science and engineering as aircraft manufacturing, shipbuilding, seismic exploration of mineral resources, seismic resistance of structures, and many others. This paper considers the problem of non-stationary wave propagation from a spherical cavity located near a stationary rigid sphere in an acoustic space. Formulas are derived for the particle velocity vector and pressure in the medium. Numerical experiments are presented, the results of which are presented in graphical form. The results of this paper can be used in shipbuilding, aircraft manufacturing, by design organizations during the construction of structures, and in the design of underwater reservoirs.

**Key words:** Spherical cavity, rigid sphere, Laplace transforms, infinite system, non-stationary wave, acoustic medium, pressure.

**Language:** Russian

**Citation:** Musurmonova, M.O., Jabborov, A.U., & Musurmonov, E.A. (2025). Unstationary oscillations of acoustic space with a spherical cavity and a rigid sphere. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 11 (151), 29-36.

**Soi:** <https://s-o-i.org/1.1/TAS-11-151-6> **Doi:** <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2025.11.151.6>

**Scopus ASCC:** 2611.

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ АКУСТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА СО СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ И ЖЕСТКОМ ШАРОМ

**Аннотация:** Проблемы распространения и дифракции нестационарных волн в акустических и упругих средах имеют большое теоретическое и практическое значение в таких областях науки и техники, как авиастроение, судостроение, сейсморазведка полезных ископаемых, сейсмостойкость сооружений и многих других. В настоящей работе рассмотрена задача о распространении нестационарных волн от сферической полости, расположенной вблизи неподвижного жесткого шара в акустическом пространстве. Получены формулы для вектора скорости частиц и давления в среде. Приведены численные эксперименты, результаты которых представлены в виде графиков. Результаты работы могут быть использованы в

|                       |                         |                |                       |                |                     |                |
|-----------------------|-------------------------|----------------|-----------------------|----------------|---------------------|----------------|
| <b>Impact Factor:</b> | <b>ISRA (India)</b>     | <b>= 6.317</b> | <b>SIS (USA)</b>      | <b>= 0.912</b> | <b>ICV (Poland)</b> | <b>= 6.630</b> |
|                       | <b>ISI (Dubai, UAE)</b> | <b>= 1.582</b> | <b>ПИИЦ (Russia)</b>  | <b>= 0.191</b> | <b>PIF (India)</b>  | <b>= 1.940</b> |
|                       | <b>GIF (Australia)</b>  | <b>= 0.564</b> | <b>ESJI (KZ)</b>      | <b>= 8.100</b> | <b>IBI (India)</b>  | <b>= 4.260</b> |
|                       | <b>JIF</b>              | <b>= 1.500</b> | <b>SJIF (Morocco)</b> | <b>= 7.184</b> | <b>OAJI (USA)</b>   | <b>= 0.350</b> |

сфере судостроения, авиастроения, проектных организациях при строительстве сооружений, а также при проектировании подводных резервуаров.

**Ключевые слова:** сферическая полость, жесткий шар, преобразование Лапласа, бесконечная система, нестационарная волна, акустическая среда, давление.

## 1. Введение

Математическое моделирование нестационарных волновых процессов в акустических и упругих средах является одним из актуальных вопросов волновой динамики механики деформируемых тел. Актуальность проблем динамики деформируемых тел обусловлена развитием различных областей техники и созданием новых конструкций, работающих под действием динамических нагрузок, а также проблемами судостроения, авиастроения, строительства гражданских и промышленных зданий.

В настоящее время имеется множество научных работ, посвященных изучению распространения и дифракции волн в сплошных средах. В [1] приведено аналитическое решение задачи о нестационарном воздействии ударных волн на тонкостенную оболочку, расположенную вблизи жесткой стенки акустического полупространства. Получена бесконечная система интегральных уравнений Вольтерра с запаздывающими аргументами. Результаты численных экспериментов представлены в виде графиков. В [2] представлен аналитический метод решения нестационарных задач аэрогидроупругости и гидроэлектроупругости, позволяющий свести их к интегральным уравнениям Вольтерра с запаздывающими аргументами, а также приведены решения задач дифракции акустических ударных волн на полых цилиндрических или сферических оболочках, расположенных вблизи плоской границы. Исследовано влияние жесткой стенки и свободной границы полупространства на напряженно-деформированное состояние сферических и цилиндрических оболочек. Обоснована правомерность применения метода редукции к полученной бесконечной системе интегральных уравнений.

Статья [3] посвящена исследованию задачи распространения нестационарных волн из сферической полости в акустическое полупространство. Задача сведена к решению матричного уравнения, решение которого построено в виде бесконечного ряда экспонент. Получена формула для гидродинамического давления в акустической среде.

В [4] рассмотрена осесимметричная задача распространения нестационарных волн в упругой среде, ограниченной двумя эксцентричными сферическими поверхностями со смещенными центрами.

В [5] исследовалось распространение нестационарных продольных волн из сферической полости, подкреплённой тонкой сферической оболочкой, в упруго-пористое пространство, насыщенное жидкостью. Получено аналитическое решение задачи в пространстве изображений преобразования Лапласа. Численные результаты представлены в виде графиков.

В работе [6] построен метод решения краевой задачи для эллиптического пограничного слоя, возникающего в тонкостенных оболочках вращения при нормальных ударах по лобовым поверхностям. Предлагаемый в данной работе метод решения уравнений эллиптического пограничного слоя основан на использовании асимптотического представления изображений решения Лапласа (по времени) в экспоненциальной форме. В работе представлен численный расчёт нормального напряжения на основе полученных аналитических решений для случая сферической оболочки.

В данной работе [7] рассматривается распространение SH-волн в неоднородном вязкоупругом слое, лежащем на неоднородном изотропном полупространстве. Для исследования вязкоупругого слоя рассмотрена модель типа модели Кельвина-Фойгта. Решения получены аналитически как для слоя, так и для полупространства. Влияние параметра неоднородности изучено как для вязкоупругого слоя, так и для неоднородного изотропного полупространства. Численные результаты представлены построением графика зависимости фазовой скорости от волнового числа при различных значениях параметра неоднородности и изменении глубины слоя.

В работе [8] рассматривается задача распространения нестационарных кососимметричных волн из сферической полости в пористо-упругое полупространство, насыщенное жидкостью. Для решения задачи использовались интегральное преобразование Лапласа по безразмерному времени и метод неполного разделения переменных. В пространстве изображений получены формулы для коэффициентов ряда компонент вектора перемещений и тензора напряжений. Проведены численные эксперименты, результаты которых представлены в виде графиков. В статье [9] изучается осесимметричная задача распространения нестационарных волн из сферической полости в плоском акустическом слое. В пространстве изображений Лапласа задача сводится к решению бесконечного матричного

**Impact Factor:**

ISRA (India) = 6.317  
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582  
 GIF (Australia) = 0.564  
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
 ПИИЦ (Russia) = 0.191  
 ESJI (KZ) = 8.100  
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630  
 PIF (India) = 1.940  
 IBI (India) = 4.260  
 OAJI (USA) = 0.350

уравнения, решение которого строится в виде бесконечного ряда по экспонентам. Численные результаты представлены в виде графиков изменения давления во времени в окрестности сферической полости.

В данной работе [10] представлены аналитические решения для динамического отклика обделенного тоннеля в слое грунта, покрытом композитной толщей, при воздействии SH-волн с использованием метода комплексных функций. Анализ рассеяния упругих волн в композитной толще представляет особую важность из-за наличия границ между слоями грунта. На примерах расчетов анализируется влияние на динамический отклик обделенного тоннеля в нескольких типах композитных толщ.

В данной работе [11] рассматривается задача распространения кососимметричных нестационарных сдвиговых волн от толстостенной сферической оболочки в упругом пространстве. Применяется интегральное преобразование Лапласа по безразмерному времени. Получены формулы для компонент вектора перемещений и тензора напряжений в пространстве. Переход к исходным значениям осуществляется с использованием теории вычетов. Также проводятся численные эксперименты.

В статье [12] рассматривается задача распространения кососимметричных нестационарных волн в упругом сферическом слое. Применяются интегральное преобразование Лапласа по безразмерному времени и метод неполного разделения переменных. В пространстве изображений задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, решение которой ищется в виде бесконечного ряда по экспонентам, что позволяет получить решение бесконечной системы без использования метода редукции. Получены формулы для компонент вектора перемещений и тензора напряжений. Проведены численные эксперименты, результаты которых представлены в виде графиков.

В работе [13] получено аналитическое решение задачи дифракции цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с упругим радикально-неоднородным покрытием, расположенном вблизи границы упругого полупространства. Приведены результаты расчета акустического поля в дальней зоне.

Данная работа посвящена изучению задачи о нестационарных колебаниях акустического пространства со сферической полостью и неподвижным жестким шаром. Цель работы – разработка алгоритм решения задачи и исследование нестационарных волновых процессов в окрестности полости и шара.

**2. Постановка задачи**

Пусть в неограниченном акустическом пространстве расположены сферическая полость радиусом  $R_1$  и неподвижный жесткий шар радиуса  $R_2$ , расстояние между их центрами равно  $l$  ( $l > R_1 + R_2$ ).

В начальный момент  $\tau = 0$  времени к внутренней поверхности сферической полости приложена осесимметричная заданная поверхностная нормальная нагрузка  $p_1(\tau, \theta)$ .

С учётом осевой симметрии задачи движение акустической среды относительно скалярного потенциала  $\varphi$  скорости описывается волновым уравнением

$$\gamma^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} = \Delta \varphi, \quad (1)$$

$$\Delta = \frac{1}{r_i^2} \frac{\partial}{\partial r_i} \left( r_i^2 \frac{\partial}{\partial r_i} \right) + \frac{1}{r_i^2 \sin \theta_i} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left( \sin \theta_i \frac{\partial}{\partial \theta_i} \right).$$

Граничное условие на поверхности полости имеет следующий вид:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right|_{r_1=R_1} = -p_1(\tau, \theta_1), \quad p = -\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}. \quad (2)$$

На поверхности шара скорость частицы равна нулю

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r_2=R_2} = 0, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad (3)$$

Начальные условия – однородные

$$\varphi|_{\tau=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}|_{\tau=0} = 0. \quad (4)$$

В бесконечности отсутствуют возмущения

$$\lim_{r_i \rightarrow \infty} \varphi = 0. \quad (5)$$

Постановка задачи приведена в следующих безразмерных величинах (штрих означает безразмерную величину):

$$r' = \frac{r}{R_1}, \quad \tau = \frac{ct}{R_1}, \quad \varphi' = \frac{\varphi}{R_1^2}, \quad R'_2 = \frac{R_2}{R_1}, \quad p' = \frac{p}{\rho c^2},$$

$$v' = \frac{v}{c}, \quad \gamma = 1,$$

где  $\rho$  – плотность среды;  $c$  – скорость звука в среде;  $t$  – время. Далее, штрихи в обозначении безразмерных величин будут опущены.

**3. Метод решения.**

Начально-краевая задача (1) – (5) решается с применением интегрального преобразования Лапласа по времени  $\tau$  [14] и метода неполного разделения переменных [3, 15].

Учитывая осевую симметрию задачи и отсутствие возмущений на бесконечности (5), в пространстве изображений решение уравнений (1) запишем в виде

$$\phi^L = \sum_{\alpha=0}^2 \frac{1}{\sqrt{r_\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} A_{\alpha n}^L(s) K_{n+1/2}(r_\alpha \gamma s) P_n(\cos \theta_\alpha), \quad (6)$$

где  $K_{n+1/2}(x)$  - модифицированные функции Бесселя второго рода [15];  $A_{\alpha n}^L(s)$  - неизвестные функции параметра  $s$ ; Слагаемые при  $\alpha=1$  и  $\alpha=2$  соответствуют распространяющейся от полости и отраженной от шара волнам.

Используя теорему сложения для функций Бесселя  $K_{n+1/2}(x)$  [16] и учитывая выражения этих функций через элементарные [17], изображения (6) потенциала представим в каждой из двух систем координат следующим образом ( $\alpha=1, 2$ ;  $\kappa=1+\text{mod}_2 \alpha$ ):

$$\phi^L = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^L(r_\alpha, s) P_n(\cos \theta_\alpha), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \phi_n^L(r_\alpha, s) = & \frac{1}{r_\alpha^{n+1}(\gamma s)^n} \left[ R_{n0}(r_\alpha \gamma s) A_{\alpha n}^L(s) e^{-r_\alpha \gamma s} + \right. \\ & + R_{n0}(-r_\alpha \gamma s) \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}(s) A_{\alpha p}^L(s) e^{-l \gamma s} e^{r_\alpha \gamma s} - \\ & \left. - R_{n0}(r_\alpha \gamma s) \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}(s) A_{\alpha p}^L(s) e^{-l \gamma s} e^{-r_\alpha \gamma s} \right], \\ C_{np}(s) = & \frac{2n+1}{2ls} \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} b_{\sigma}^{(n0p0)} \frac{R_{\sigma 0}(ls)}{(ls)^\sigma}. \end{aligned}$$

Изображения скорости и давления, а также заданная нагрузка раскладываются в ряды по полиномам Лежандра

$$\begin{aligned} p^L = & \sum_{n=0}^{\infty} p_n^L(r_\alpha, s) P_n(\cos \theta_\alpha), \\ v^L = & \sum_{n=0}^{\infty} v_n^L(r_\alpha, s) P_n(\cos \theta_\alpha), \\ p_1^L = & \sum_{n=0}^{\infty} p_{1n}^L(s) P_n(\cos \theta_1). \end{aligned} \quad (8)$$

Из вторых равенств (2) и (3) следуют, что

$$\begin{aligned} p_n^L(r_\alpha, s) = & -\frac{1}{r_\alpha^{n+1} \gamma^n s^{n-1}} \left[ R_{n0}(r_\alpha \gamma s) A_{\alpha n}^L(s) e^{-r_\alpha \gamma s} + \right. \\ & + R_{n0}(-r_\alpha \gamma s) \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}(s) A_{\alpha p}^L(s) e^{-l \gamma s} e^{r_\alpha \gamma s} - \\ & \left. - R_{n0}(r_\alpha \gamma s) \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}(s) A_{\alpha p}^L(s) e^{-l \gamma s} e^{-r_\alpha \gamma s} \right], \quad (9) \\ v_n^L(r_\alpha, s) = & -\frac{1}{r_\alpha^{n+2} (\gamma s)^n} \left[ R_{n1}(r_\alpha \gamma s) A_{\alpha n}^L(s) e^{-r_\alpha \gamma s} + \right. \\ & + R_{n1}(-r_\alpha \gamma s) \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}(s) A_{\alpha p}^L(s) e^{-l \gamma s} e^{r_\alpha \gamma s} - \\ & \left. - R_{n1}(r_\alpha \gamma s) \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}(s) A_{\alpha p}^L(s) e^{-l \gamma s} e^{-r_\alpha \gamma s} \right], \quad (10) \end{aligned}$$

где  $\kappa=1+\text{mod}_2 \alpha$ ,  $\alpha=1, 2$ .

Далее, удовлетворяя граничным условиям (2) и (3) с использованием формул (9) и (10) при  $\alpha=1$  и  $\alpha=2$ , получим бесконечную систему линейную алгебраических уравнений относительно неизвестных функций  $A_{\alpha n}^L(s)$  и  $A_{2n}^L(s)$ , которую запишем в матричном виде:

$$\begin{cases} \mathbf{M} \mathbf{A}_1 y^2 + \mathbf{F}_1 \mathbf{A}_2 x - \mathbf{F}_2 \mathbf{A}_2 x y^2 = \mathbf{k} y \\ \mathbf{N} \mathbf{A}_2 z^2 + \mathbf{T}_1 \mathbf{A}_1 x - \mathbf{T}_2 \mathbf{A}_1 x z^2 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$\mathbf{k}(s) = \|\mathbf{k}_0(s), \mathbf{k}_1(s), \dots\|^T,$$

$$\mathbf{A}_\alpha(s) = \|A_{\alpha 0}^L(s), A_{\alpha 1}^L(s), \dots\|^T, \quad (\alpha=1, 2)$$

$$x = e^{-l \gamma s}, \quad y = e^{-R_1 \gamma s}, \quad z = e^{-R_2 \gamma s}.$$

Здесь  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{N}$  - бесконечные диагональные матрицы соответственно с элементами  $M_n(s)$ ,  $N_n(s)$ ;  $\mathbf{F}_\alpha$ ,  $\mathbf{T}_\alpha$  - бесконечные матрицы соответственно с элементами  $F_{\alpha np}(s)$ ,  $T_{\alpha np}(s)$  ( $\alpha=1, 2$ ) и  $\mathbf{k}(s)$  - бесконечный вектор-столбец с элементами  $k_n(s)$ , которые имеют следующие виды:

$$\begin{aligned} M_n(s) &= R_{n0}(R_1 \gamma s), \quad F_{1np}(s) = R_{n0}(-R_1 \gamma s) C_{np}(s), \\ F_{2np}(s) &= R_{n0}(R_1 \gamma s) C_{np}(s), \\ k_n(s) &= R_1^{n+1} \gamma^n s^{n-1} p_{1n}^L(s), \\ N_n(s) &= R_{n1}(R_2 \gamma s), \quad T_{1np}(s) = R_{n1}(-R_2 \gamma s) C_{np}(s), \\ T_{2np}(s) &= R_{n1}(R_2 \gamma s) C_{np}(s). \end{aligned}$$

Отметим, что элементы всех матриц и вектора являются рациональными функциями параметра преобразования Лапласа  $s$ .

Решение системы уравнений (11) представим в виде бесконечных рядов по экспонентам:

$$\mathbf{A}_\alpha = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} \mathbf{a}_{ijk}^{(\alpha)}(s) x^i y^{-j-1} z^{-k-1}, \quad (12)$$

где  $\mathbf{a}_{ijk}^{(\alpha)}(s)$  - бесконечные неизвестные векторы с соответствующими элементами  $a_{ijk}^{(\alpha,n)}(s)$ , ( $\alpha=1, 2$ ;  $n=0, 1, 2, \dots$ ).

Подставляя (12) в систему (11) и приравнявая коэффициенты в левой и правой частях при одинаковых степенях переменных  $x$ ,  $y$  и  $z$ , получим следующие рекуррентные соотношения для коэффициентов  $a_{ijk}^{(\alpha,n)}(s)$ :

$$a_{000}^{(1,n)}(s) = \frac{R_1^{n+1} s^{n-1} p_{1n}^L(s)}{M_n(s)}, \quad n \geq 0; \quad \mathbf{a}_{0,0,k}^{(1)}(s) = 0,$$

$$k \geq 1; \quad \mathbf{a}_{0,j,k}^{(1)}(s) = 0, \quad j \neq 0, \quad k \geq 0;$$

$$\mathbf{a}_{ijk}^{(1)}(s) = \mathbf{E}_1(s) \mathbf{a}_{i-1,j,k}^{(2)}(s), \quad i \geq 1, \quad j=0, 1, \quad k \geq 0;$$

$$\mathbf{a}_{ijk}^{(1)}(s) = \mathbf{E}_1(s) \mathbf{a}_{i-1,j,k}^{(2)}(s) - \mathbf{E}_2(s) \mathbf{a}_{i-1,j-2,k}^{(2)}(s), \quad i \geq 1, \quad j \geq 2, \quad k \geq 0;$$

$$\mathbf{a}_{0,j,k}^{(2)}(s) = 0, \quad j \geq 0, \quad k \geq 0;$$

$$\mathbf{a}_{ijk}^{(2)}(s) = \mathbf{E}_1(s) \mathbf{a}_{i-1,j,k}^{(1,p)}(s), \quad i \geq 1, \quad j \geq 1, \quad k=0, 1;$$

## Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317  
ISI (Dubai, UAE) = 1.582  
GIF (Australia) = 0.564  
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
ПИИЦ (Russia) = 0.191  
ESJI (KZ) = 8.100  
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630  
PIF (India) = 1.940  
IBI (India) = 4.260  
OAJI (USA) = 0.350

$$\mathbf{a}_{ijk}^{(2)}(s) = \mathbf{E}_1(s)\mathbf{a}_{i-1,j,k}^{(1)}(s) - \mathbf{E}_3(s)\mathbf{a}_{i-1,j,k-2}^{(1)}(s),$$

$$i \geq 1, j \geq 0, k \geq 2; \mathbf{E}_1(s) = \|\mathbf{C}_{np}(s)\|,$$

$$\mathbf{E}_2(s) = \left\| \frac{M_n(-s)}{M_n(s)} \mathbf{C}_{np}(s) \right\|, \mathbf{E}_3(s) = \left\| \frac{N_n(-s)}{N_n(s)} \mathbf{C}_{np}(s) \right\|.$$

Эти соотношения позволяют определить все искоемые изображения без использования редукции бесконечной системы уравнений. Анализ рекуррентных соотношений показывает, что изображения являются рациональными функциями параметра преобразования Лапласа, что дает возможность вычислять их оригиналы, а следовательно, и оригиналы коэффициентов перемещения и напряжения в среде с помощью теории вычетов [18].

Подставляя ряды (12) в формулы (9) и (10), в пространстве изображений найдем следующие выражения для коэффициентов рядов компонент скорости и давления в каждой из сферических систем координат ( $\alpha = 1, 2$ ;  $\kappa = 1 + \text{mod}_2 \alpha$ ):

$$p_n^L(r_\alpha, s) = -\frac{1}{r_\alpha^{n+1} \gamma^n s^{n-1}} \sum_{ijk=0}^{\infty} \left[ R_{n0}(r_\alpha \gamma s) a_{ijk}^{(\alpha, n)}(s) e^{-r_\alpha \gamma s} + \right. \\ \left. + R_{n0}(-r_\alpha \gamma s) \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}(s) a_{ijk}^{(\kappa, p)}(s) e^{-l \gamma s} e^{-r_\alpha \gamma s} - \right. \\ \left. + R_{n0}(r_\alpha \gamma s) \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}(s) a_{ijk}^{(\kappa, p)}(s) e^{-l \gamma s} e^{-r_\alpha \gamma s} \right] x^i y^{-j-1} z^{-k-1},$$

$$v_n^L(r_\alpha, s) = -\frac{1}{r_\alpha^{n+2} (\gamma s)^n} \left[ R_{n1}(r_\alpha \gamma s) a_{ijk}^{(\alpha, n)}(s) e^{-r_\alpha \gamma s} + \right. \\ \left. + R_{n1}(-r_\alpha \gamma s) \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}(s) a_{ijk}^{(\kappa, p)}(s) e^{-l \gamma s} e^{-r_\alpha \gamma s} - \right. \\ \left. + R_{n1}(r_\alpha \gamma s) \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}(s) a_{ijk}^{(\kappa, p)}(s) e^{-l \gamma s} e^{-r_\alpha \gamma s} \right] x^i y^{-j-1} z^{-k-1}$$

## 4. Численные результаты и сравнения.

Результаты численных экспериментов представлены в виде графиков изменения давления  $p$  по безразмерному времени  $\tau$ . В качестве акустической среды принималась вода:  $c = 1500$  м/сек,  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Полагалось, что  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 1.5$ ,  $l = 3.5$ , а нагрузка на полости имеет вид равномерно распределенного нормального давления  $p_1(\tau, \theta_1) = H(\tau)$ , где  $H(\tau)$  - единичная функция Хевисайда. В расчетах учитывалось шесть члена ряда по полиномам Лежандра. Графики изменений давления  $p$  по времени  $\tau$  представлены на рис. 1:  $r_1 = 1.5$  (кривая 1),  $r_1 = 1.8$  (кривая 2) и  $r_1 = 1.8$  (кривая 3), когда  $\theta_1 = \pi$ . На рис. 2 показано изменение давления  $p$  по времени  $\tau$  в точках среды с координатами:  $r_1 = 1.2$ ,  $\theta_1 = 3\pi/4$  (кривая 1);  $r_1 = 1.5$ ,  $\theta_1 = 3\pi/4$  (кривая 2);  $r_1 = 1.8$ ,  $\theta_1 = 3\pi/4$  (кривая 3).

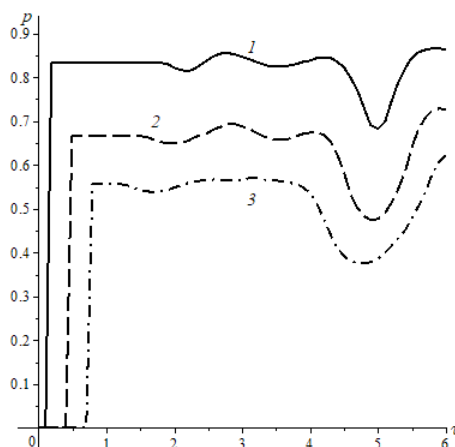


Рис. 1. Изменение давления  $p$  во времени  $\tau$  при различных значениях переменных:

1.  $r_1 = 1.2$ ,  $\theta_1 = \pi$ ; 2.  $r_1 = 1.5$ ,  $\theta_1 = \pi$ ; 3.  $r_1 = 1.8$ ,  $\theta_1 = \pi$ , когда  $p_1(\tau, \theta_1) = H(\tau)$ .

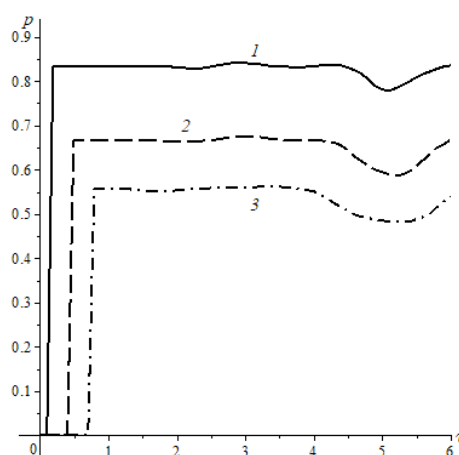


## Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317  
ISI (Dubai, UAE) = 1.582  
GIF (Australia) = 0.564  
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
ПИИИ (Russia) = 0.191  
ESJI (KZ) = 8.100  
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630  
PIF (India) = 1.940  
IBI (India) = 4.260  
OAJI (USA) = 0.350

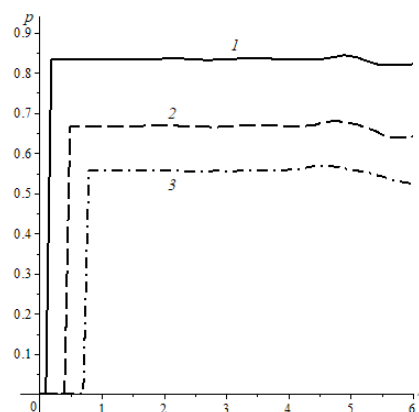


**Рис. 2. Изменение давления  $p$  во времени  $\tau$  при различных значениях переменных:**

1.  $r_1 = 1.2$ ,  $\theta_1 = 3\pi/4$ ; 2.  $r_1 = 1.5$ ,  $\theta_1 = 3\pi/4$ ; 3.  $r_1 = 1.8$ ,  $\theta_1 = 3\pi/4$ , когда  $p_1(\tau, \theta_1) = H(\tau)$ .

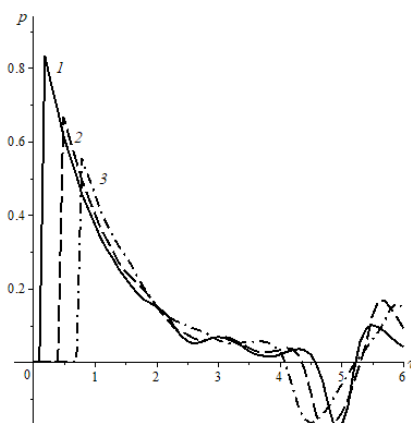
Приведенные на рис. 3 кривые получены при следующих значениях параметров:  $r_1 = 1.2$

(кривая 1),  $r_1 = 1.5$  (кривая 2) и  $r_1 = 1.8$  (кривая 3), когда  $\theta_1 = \pi/2$ .



**Рис. 3. Изменение давления  $p$  во времени  $\tau$  при различных значениях переменных:**

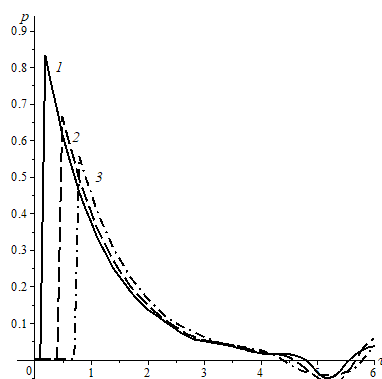
1.  $r_1 = 1.2$ ,  $\theta_1 = \pi/2$ ; 2.  $r_1 = 1.5$ ,  $\theta_1 = \pi/2$ ; 3.  $r_1 = 1.8$ ,  $\theta_1 = \pi/2$ , когда  $p_1(\tau, \theta_1) = H(\tau)$ .



**Рис. 4. Изменение давления  $p$  во времени  $\tau$  при различных значениях переменных:**

1.  $r_1 = 1.2$ ,  $\theta_1 = \pi$ ; 2.  $r_1 = 1.5$ ,  $\theta_1 = \pi$ ; 3.  $r_1 = 1.8$ ,  $\theta_1 = \pi$ , когда  $p_1(\tau, \theta_1) = e^{-\tau}H(\tau)$ .

|                       |                         |                |                       |                |                     |                |
|-----------------------|-------------------------|----------------|-----------------------|----------------|---------------------|----------------|
| <b>Impact Factor:</b> | <b>ISRA (India)</b>     | <b>= 6.317</b> | <b>SIS (USA)</b>      | <b>= 0.912</b> | <b>ICV (Poland)</b> | <b>= 6.630</b> |
|                       | <b>ISI (Dubai, UAE)</b> | <b>= 1.582</b> | <b>ПИИЦ (Russia)</b>  | <b>= 0.191</b> | <b>PIF (India)</b>  | <b>= 1.940</b> |
|                       | <b>GIF (Australia)</b>  | <b>= 0.564</b> | <b>ESJI (KZ)</b>      | <b>= 8.100</b> | <b>IBI (India)</b>  | <b>= 4.260</b> |
|                       | <b>JIF</b>              | <b>= 1.500</b> | <b>SJIF (Morocco)</b> | <b>= 7.184</b> | <b>OAJI (USA)</b>   | <b>= 0.350</b> |

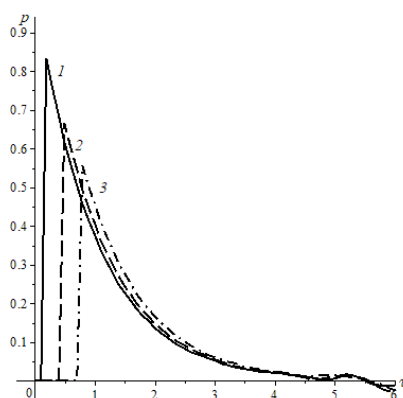


**Рис. 5. Изменение давления  $p$  во времени  $\tau$  при различных значениях переменных:**

1.  $r_1 = 1.2$ ,  $\theta_1 = 3\pi/4$ ; 2.  $r_1 = 1.5$ ,  $\theta_1 = 3\pi/4$ ; 3.  $r_1 = 1.8$ ,  $\theta_1 = 3\pi/4$ , когда  $p_1(\tau, \theta_1) = e^{-\tau} H(\tau)$ .

Все графики на рис. 4-6 построены для случая, когда нагрузка на полости приложено равномерно распределенное нормальное давление  $p$ , затухающее во времени  $\tau$ :  $p_1(\tau, \theta_1) = e^{-\tau} H(\tau)$ . Здесь процессы расчетов аналогичны описанным

выше, и все графики отображают изменения давления в указанных выше точках, т. е. точки на рис. 4 соответствуют точкам на рис. 1, точки на рис. 5 — точкам на рис. 2, а точки на рис. 6 — точкам на рис. 3.



**Рис. 6. Изменение давления  $p$  во времени  $\tau$  при различных значениях переменных:**

1.  $r_1 = 1.2$ ,  $\theta_1 = \pi/2$ ; 2.  $r_1 = 1.5$ ,  $\theta_1 = \pi/2$ ; 3.  $r_1 = 1.8$ ,  $\theta_1 = \pi/2$ , когда  $p_1(\tau, \theta_1) = e^{-\tau} H(\tau)$ .

Сравнение графиков показывает, что влияние граничных поверхностей на изменение давления в точке окружающей среды с координатами  $r_1 = 1.2$ ,  $\theta_1 = \pi/2$  (рис. 3 и рис. 6) меньше, чем влияние изменения давления в точке среды с координатами  $r_1 = 1.2$ ,  $\theta_1 = \pi$  (рис. 1 и рис. 4).

### 5. Заключение.

Разработан алгоритм решения задачи о нестационарных колебаниях акустического пространства со сферической полостью и неподвижным жестком шаром. В пространстве изображений Лапласа получена бесконечная

система линейных алгебраических уравнений, решение которой построено в виде бесконечного ряда по экспонентам, что позволило получить рекуррентные соотношения и начальные условия к ним. Получены численные результаты. Графики зависимости давления от времени показывают, что волны, отраженные от граничных поверхностей, оказывают влияние на гидродинамическое состояние окружающей среды в окрестности шара и полости. Результаты работы могут быть использованы в сфере судостроения, авиастроения, проектных организациях при строительстве сооружений, а также при проектировании подводных резервуаров.

|                       |                         |                |                       |                |                     |                |
|-----------------------|-------------------------|----------------|-----------------------|----------------|---------------------|----------------|
| <b>Impact Factor:</b> | <b>ISRA (India)</b>     | <b>= 6.317</b> | <b>SIS (USA)</b>      | <b>= 0.912</b> | <b>ICV (Poland)</b> | <b>= 6.630</b> |
|                       | <b>ISI (Dubai, UAE)</b> | <b>= 1.582</b> | <b>PIHII (Russia)</b> | <b>= 0.191</b> | <b>PIF (India)</b>  | <b>= 1.940</b> |
|                       | <b>GIF (Australia)</b>  | <b>= 0.564</b> | <b>ESJI (KZ)</b>      | <b>= 8.100</b> | <b>IBI (India)</b>  | <b>= 4.260</b> |
|                       | <b>JIF</b>              | <b>= 1.500</b> | <b>SJIF (Morocco)</b> | <b>= 7.184</b> | <b>OAJI (USA)</b>   | <b>= 0.350</b> |

## References:

1. Babayev, A.E. (1989). Diffraction of non-stationary waves on shells located near a flat boundary, *Applied mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine*, Vol. 25, No. 1, pp. 59-69. <https://doi.org/10.1007/BF00887318>
2. Babayev, A.E. (1990). *Non-stationary waves in continuous media with a system of reflecting surfaces*, Kyiv, Naukova dumka.
3. Gorshkov, A.G., Tarlakovskii, D.V., & Shukurov, A.M. (1991). Propagation of waves from a spherical cavity in an acoustic half-space, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, V.55, No. 1, pp. 172-174. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(91\)90076-7](https://doi.org/10.1016/0021-8928(91)90076-7)
4. Gorshkov, A.G., Tarlakovskii, D.V., & Shukurov, A.M. (1994). Unsteady vibrations of an elastic medium bounded by two eccentric spherical surfaces, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 58, No. 2, pp. 275-282. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(94\)90056-6](https://doi.org/10.1016/0021-8928(94)90056-6)
5. Jurayev, G.U., & Musurmonova, M.O. (2022). "An algorithm for solving the problem of expansion of a spherical cavity supported by a thin spherical shell in an elastic-porous fluid-saturated medium," *AIP Conference Proceedings*, Vol. 2432, No. 1, p. 030109. <https://doi.org/10.1063/5.0089549>
6. Kirillova, I.V. (2024). "Elliptic Boundary Layer in Shells of Revolution under Surface Shock Loading of Normal Type," *Mechanics of Solids*, Vol. 59, No. 5, pp. 2686-2693. <http://doi.org/10.1134/S0025654424604397>
7. Majhi, S., Pal, P.C., & Kumar, S. (2018). "Propagation of SH waves in a viscoelastic layer overlying an inhomogeneous isotropic half-space," *Ain Shams Engineering Journal*, Vol. 9, No. 4, pp. 675-680, <http://doi.org/10.1016/j.asej.2016.03.011>
8. Musurmonova, M. (2024). "Propagation of Non-stationary Skew-Symmetric Waves from a Spherical Cavity in a Porous-elastic Half-space," *wse as transactions on applied and theoretical mechanics*, Vol. 19, pp. 135-142. <http://doi.org/10.37394/232011.2024.19.15>
9. Saliyev, A.A., Tarlakovskii, D.V., & Shukurov, A.M. (2008). The propagation of non-stationary waves from a spherical cavity in an acoustic layer, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 72, No. 4, pp. 410-416. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2008.08.013>
10. Song- Chol, R., Shuhong, W., & Hak -Son, J. (2023). "Scattering of Plane SH Waves Around a Lined Tunnel in the Covering Layer of Composite Strata," *Mechanics of Solids*, Vol. 58, No. 5, pp. 1806-1820. <http://doi.org/10.3103/S002565442360112X>
11. Shukurov, A. (2023). Propagation of skew-symmetric unsteady shear waves from thick-walled shell in elastic space, *E3S Web of Conferences*, Vol. 365, 01014, <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202336501014>
12. Shukurov, A., & Musurmonova, M. (2024). Propagation of skew-symmetric nonstationary waves in an elastic spherical layer, *AIP Conf. Proc.* 3004, 040009, <https://doi.org/10.1063/5.0199588>
13. Tolokonnikov, L.A., & Efimov, D.Yu. (2021). "Diffraction of Sound Waves at an Elastic Cylinder with an Inhomogeneous Coating in the Vicinity of the Boundary of an Elastic Half-Space", *Mechanics of Solids*, Vol. 56, No. 8, pp.1657-1667 <https://doi.org/10.3103/S0025654421080185>
14. Doetsch, G. (1971). *Guide to the practical applications of the Laplace and Z – transforms*, Van No strand-Reinhold.
15. Kuznetsov, D.S. (1985). *Special functions*, Moscow, Higher School.
16. Ivanov, Ye.A. (1970). *Diffraction of electromagnetic waves on two bodies*, National Aeronautics and Space Administration, Washington.
17. (1984). *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, edited by Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. Dover publications, New York.
18. Lavrentiev, M.A., & Shabbat, B.V. (1987). *Methods of the theory of functions of a complex variable*, Moscow, Nauka.