

Impact Factor:	ISRA (India)	= 6.317	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
	ISI (Dubai, UAE)	= 1.582	ПИИИ (Russia)	= 0.191	PIF (India)	= 1.940
	GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.100	IBI (India)	= 4.260
	JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 7.184	OAJI (USA)	= 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2025 Issue: 12 Volume: 152

Received: 23.12.2025
Accepted/Published: 30.12.2025 <https://T-Science.org>

Issue

Article



Amon Musurmonovich Shukurov

Karshi State University
Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor of the Department of Applied mathematics,
Karshi, Republic of Uzbekistan
shukurovamon@yandex.ru

Ma'mura Oman qizi Musurmonova

Shakhrisabz State Pedagogical Institute
Senior Lecturer to Department of Mathematics
and Information Technology in Education,
dotsent, Shakhrisabz, Republic of Uzbekistan

Abdulla Uyg'un o'g'li Jabborov

Karshi State University
PhD student to Department of Applied mathematics
Karshi, Republic of Uzbekistan

Xumoyun Oman o'g'li Musurmonov

Karshi State Technical University
master's student to Department of Oil
and Gas Engineering and Processing Technologies,
Karshi, Republic of Uzbekistan

To'lqin Boboqul o'g'li Ashurov

Karshi State University
master's student to Department of Applied mathematics,
Karshi, Republic of Uzbekistan
ashurovtolqin@gmail.com

UNSTATIONARY OSCILLATIONS OF ELASTIC SPACE WITH A THICK-WALLED SPHERICAL SHELL

Abstract: This paper considers the problem of transient oscillations of an elastic space with a thick-walled spherical shell bounded by inner and outer concentric spherical surfaces. Exact expressions are obtained for the series coefficients in Laplace images, the originals of which are constructed using residue theory. Analysis of numerical results shows that waves reflected from boundary surfaces affect the stress-strain state of the shell and the surrounding environment.

Key words: non-stationary oscillation, space, elastic medium, thick-walled shell, displacement, stress.

Language: Russian

Citation: Shukurov, A.M., Musurmonova, M.O., Jabborov, A.U., Musurmonov, X.O., & Ashurov, T.B. (2025). Unstationary oscillations of elastic space with a thick-walled spherical shell. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 12 (152), 51-59.

Soi: <https://s-o-i.org/1.1/TAS-12-152-10>

Doi:  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2025.12.152.10>

Scopus ASCC: 2611.

Impact Factor:	ISRA (India)	= 6.317	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
	ISI (Dubai, UAE)	= 1.582	РИИЦ (Russia)	= 0.191	PIF (India)	= 1.940
	GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.100	IBI (India)	= 4.260
	JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 7.184	OAJI (USA)	= 0.350

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА С ТОЛСТОСТЕННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ

Аннотация: В работе рассматривается задача о нестационарных колебаниях упругого пространства с толстостенной сферической оболочкой, ограниченной внутренней и внешней концентричными сферическими поверхностями. Для коэффициентов рядов получены точные выражения в изображениях Лапласа, оригиналы которых построены с помощью теории вычетов. Анализ численных результатов показывает, что отраженные от граничных поверхностей волны оказывают влияние на напряженно-деформированное состояние оболочки и окружающей среды.

Ключевые слова: нестационарное колебание, пространство, упругая среда, толстостенная оболочка, смещение, напряжение.

1. Введение

Математическое моделирование и исследование нестационарных волновых процессов в сплошных средах является одной из сложных, но и актуальных проблем волновой динамики. Актуальность проблем волновой динамики определяется созданием новых конструкций, работающих под воздействием динамических сил в различных областях техники, а также практическими задачами, возникающими в геофизике, сейсмологии, горном деле, гражданском и промышленном строительстве.

В настоящее время существует большое количество научных работ, посвященных изучению распространения и дифракции волн в сплошных средах. Например, в работе [1] была изучена трехмерная методология моделирования процессов ударных волн в жидкостях и твердых телах, а также моделирования взаимодействия жидкостей и конструкций. В работе [2] рассматривается проблема анализа переходной эластодинамики толстостенной сферической оболочки, заполненной жидкостью и погруженной в упругую среду, с использованием аналитического подхода. Рассматриваются различные определяющие соотношения для упругой среды, материала оболочки и заполняющей жидкости, а также различные источники возбуждения. В [3] аналитически решены задачи рассеяния и дифракции цилиндрической поперечной сдвиговой волны в вязкоупругой изотропной среде сферической неоднородностью. Волны генерируются гармоническими продольными колебаниями стенок цилиндра. Сферическое включение расположено в радиальном центре цилиндра и отличается от цилиндрического материала только комплексным модулем сдвига. Приведены численные примеры, демонстрирующие влияние изменений жесткости включения на поля смещений.

В [4] рассматриваются комбинированные сейсмические колебания протяженных подземных сооружений (трубопроводов и тоннелей) и грунта в случае одномерной деформации среды. Преобладает деформация грунта в направлении распространения сейсмической волны,

совпадающем с осью трубопровода. В работе представлены формулировки и решения параболических задач, моделирующих физические явления в грунтах с разрывами скорости на границе в начальный момент времени. Для физически линейной среды получены новые автомодельные решения, описывающие процесс нестационарного осесимметричного сдвига в сферических координатах. Выявлены параметры, влияющие на разрушение трубопровода, и указаны методы повышения сейсмостойкости таких сооружений.

В работе [5] исследовано распространение нестационарных поперечных сдвиговых волн от сферической полости в упругом полупространстве. Получены формулы для компонент вектора смещения и тензора напряжений. В [6] исследованы стационарные колебания подземного трубопровода, вызванные горизонтальным падением плоской сейсмической волны. Показано, что косая волна может быть выражена в виде нескольких продольных и поперечных волн, распространяющихся вдоль трубопровода на высоких скоростях. В [7] исследовано распространение нестационарных продольных волн от сферической полости, подкрепленной тонкой сферической оболочкой в упруго-пористом пространстве, насыщенном жидкостью. Получено аналитическое решение задачи в пространстве изображений преобразования Лапласа. Численные результаты представлены в виде графиков.

В публикации [8] был разработан метод решения краевой задачи для эллиптических пограничных слоев, возникающих во вращающихся тонких оболочках при ударах нормального типа о поверхность. В статье метод решения уравнений эллиптического пограничного слоя основан на использовании асимптотической формы экспоненциальной формы решения Лапласа, а численные результаты для нормального напряжения получены на основе аналитических решений, полученных для случая сферической оболочки.

В статье [9] представлен единый математический подход к описанию динамического напряженно-деформированного

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
РИИЦ (Russia) = 0.191
ESJI (KZ) = 8.100
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

состояния механических конструкций из гетерогенных материалов с двойной связанной системой пористых каналов, заполненных жидкостью. Получены новые динамические уравнения, описывающие колебания пороупругих систем на основе разработанной модели сплошной среды с дополнительными степенями свободы в виде различных давлений компонентов, составляющих жидкую фазу материала. В статье [10] рассмотрена осесимметричная задача распространения нестационарных волн из сферической полости в слое идеальных жидкостей, ограниченном плоскостями. Задача сведена к решению бесконечного матричного уравнения в пространстве Лапласа. Численные результаты представлены в виде графиков изменения давления вблизи сферической полости.

Статья [11] посвящена задаче распространения кососимметричных поперечных сдвиговых волн в упругом пространстве от толстостенной сферической оболочки. Для построения решения задачи применено интегральное преобразование Лапласа по безразмерному времени. Получены формулы для компонент вектора смещения и тензора напряжений в пространстве изображений. Переход к оригиналам осуществлен с использованием теории вычетов. Проведены численные эксперименты. В статье [12] рассматривается задача распространения кососимметричных поперечных волн в изотропном сферическом слое. Использован метод интегрального преобразования Лапласа и неполного разделения переменных по безразмерному времени. Получены формулы для компонент вектора смещения и тензора

напряжений. Результаты численных экспериментов представлены в виде графиков.

В работе [13] исследуется течение несжимаемой вязкой жидкости мимо неоднородной пористой сферической оболочки, содержащей концентрическую непроницаемую сферу. Течение вне пористой сферической оболочки определяется уравнением Стокса, а течение внутри сферической оболочки — уравнением Бринкмана. Получено точное решение задачи. Определены такие величины, как линии тока, скорость, давление и сопротивление на поверхности сферической оболочки.

Данная статья посвящена изучению задачи о нестационарных колебаниях толстостенной сферической оболочки в неограниченном изотропном пространстве. Цель и задача работы — построение алгоритма решения задачи и анализ нестационарных волновых процессов в оболочке и окружающей среде на основе численных экспериментов.

2. Постановка задачи.

Пусть в неограниченном упругом пространстве расположена толстостенная сферическая оболочка, ограниченная внутренним ($r = r_1$) и внешним ($r = r_2$) концентрическими сферическими поверхностями. Движения упругой среды и оболочки рассматривается в сферической системе координат (r, ϑ, θ) , начальная точка которой находится в центре оболочки (Рис. 1).

В начальный момент $\tau = 0$ времени к внутренней поверхности сферической оболочки приложена осесимметричная поверхностная нормальная нагрузка $p_1(\tau, \vartheta)$.

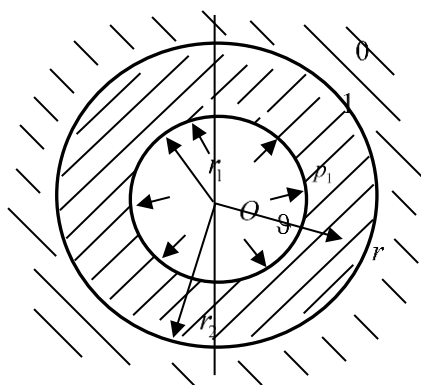


Рисунок 1. Геометрия задачи.

С учётом осевой симметрии задачи движение упругой среды и оболочки относительно скалярных потенциалов ϕ_κ смещений описываются волновыми уравнениями

$$\gamma_\kappa^2 \ddot{\phi}_\kappa = \Delta \phi_\kappa, \quad (\kappa = 0, 1), \quad (1)$$

где Δ - оператор Лапласа в сферической системе координат (r, ϑ, θ) .

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
РИИЦ (Russia) = 0.191
ESJI (KZ) = 8.100
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

Граничное условие на внутренней поверхности оболочки имеет следующий вид:

$$\sigma_{rr}^{(\kappa)} \Big|_{r=r_1} = p_1(\tau, \vartheta) \quad (2)$$

Условия контакта окружающей среды со сферической оболочкой имеют следующий вид

$$\sigma_{rr}^{(1)} \Big|_{r=r_2} = \sigma_{rr}^{(0)} \Big|_{r=r_2}, \quad w_1 \Big|_{r=r_2} = w_0 \Big|_{r=r_2} \quad (3)$$

Начальные условия – однородные:

$$\varphi_\kappa \Big|_{\tau=0} = \dot{\varphi}_\kappa \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (4)$$

На бесконечности затухает волна:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_0 = 0. \quad (5)$$

В этом случае функции φ_κ , w_κ , $\sigma_{rr}^{(\kappa)}$ и $\sigma_{\vartheta\vartheta}^{(\kappa)}$ связаны следующими соотношениями:

$$w_\kappa = \partial \varphi_\kappa / \partial r, \quad \sigma_{rr}^{(\kappa)} = \beta_\kappa (\partial w_\kappa / \partial r + 2\chi_\kappa w_\kappa / r), \\ \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(\kappa)} = \beta_\kappa (\chi_\kappa \sigma_{rr}^{(\kappa)} + (1 - \chi_\kappa)(1 + 2\chi_\kappa^2) w_\kappa / r), \quad (6)$$

Постановка задачи приведена в следующих безразмерных величинах (штрих означает безразмерную величину):

$$r' = \frac{r}{r_1}, \quad \tau = \frac{c_1^{(1)} t}{r_1}, \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(\kappa)'} = \frac{\sigma_{\alpha\beta}^{(\kappa)}}{\lambda_1 + 2\mu_1}, \quad w'_\kappa = \frac{w_\kappa}{r_1}, \\ \varphi' = \frac{\varphi}{r_1^2}, \quad r'_2 = \frac{r_2}{r_1}, \quad \chi_\kappa = \frac{\lambda_\kappa}{\lambda_\kappa + 2\mu_\kappa}, \quad \beta_\kappa = \frac{\lambda_\kappa + 2\mu_\kappa}{\lambda_1 + 2\mu_1}, \\ \gamma_\kappa = \frac{c_1^{(\kappa)}}{c_1^{(1)}},$$

где λ_κ , μ_κ – упругие параметры Ламе; $c_1^{(\kappa)}$ – скорость распространения продольных волн в оболочке и среде; w_κ , $\sigma_{\alpha\beta}^{(\kappa)}$ – компоненты перемещений и тензора напряжений; t – время. Далее, штрихи в обозначении безразмерных величин будут опущены.

3. Метод решения.

Начально-краевая задача (1) – (5) решается с применением интегрального преобразования Лапласа по времени τ [14] и метода неполного разделения переменных [5, 15]. В пространстве изображений потенциал φ_κ^L , компоненты w_κ^L вектора смещений и $\sigma_{\alpha\beta}^{(\kappa)L}$ тензора напряжений, а также заданную функцию $p_1^L(s, \vartheta)$ представим в виде бесконечных рядов по полиномам Лежандра $P_n(\cos \vartheta)$ [16].

Коэффициенты бесконечных рядов, согласно (6), связаны между собой следующими соотношениями

$$w_{\kappa n}^L = \partial \varphi_{\kappa n}^L / \partial r, \\ \sigma_{rr}^{(\kappa)L} = \beta_\kappa (\partial w_{\kappa n}^L / \partial r + 2\chi_\kappa w_{\kappa n}^L / r), \\ \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(\kappa)L} = \beta_\kappa (\chi_\kappa \sigma_{rr}^{(\kappa)L} + (1 - \chi_\kappa)(1 + 2\chi_\kappa^2) w_{\kappa n}^L / r), \quad (7)$$

Тогда постановка задачи (1)–(5) относительно коэффициентов бесконечных рядов имеет следующий вид:

$$\gamma_\kappa^2 s^2 \varphi_{\kappa n}^L = \Delta_n \varphi_{\kappa n}^L \quad (8)$$

$$\sigma_{rr}^{(\kappa)L} \Big|_{r=r_1} = p_{1n}^L(s), \quad (9)$$

$$\sigma_{rr}^{(1)L} \Big|_{r=r_2} = \sigma_{rr}^{(0)L} \Big|_{r=r_2}, \quad w_{1n}^L \Big|_{r=r_2} = w_{0n}^L \Big|_{r=r_2} \quad (10)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_0 = 0. \quad (11)$$

В пространстве изображения общее решение уравнения (8) при $\kappa=1$, разыскивается в виде:

$$\varphi_{1n}^L(r, s) = r^{-1} \xi^{-n} \left[R_{n0}(\xi) A_n^L(s) e^{-\xi} + \right. \\ \left. + (-1)^n G_{n0}(\xi) B_n^L(s) \right], \quad \xi = r \gamma_1 s. \quad (12)$$

где $A_n^L(s)$, $B_n^L(s)$ – неизвестные функции параметра s преобразования Лапласа.

Теперь используя соотношения (7), находим выражения для компонент w_{1n}^L вектора смещений и $\sigma_{rr}^{(1)L}$ тензора напряжений

$$w_{1n}^L(r, s) = -r^{-2} \xi^{-n} \left[R_{n1}(\xi) A_n^L(s) e^{-\xi} + \right. \\ \left. + (-1)^n G_{n1}(\xi) B_n^L(s) \right], \quad (13)$$

$$\sigma_{rr}^{(1)L}(r, s) = r^{-3} \xi^{-n} \beta_1 \left[Q_{n1}(\xi) A_n^L(s) e^{-\xi} + \right. \\ \left. + (-1)^n E_{n1}(\xi) B_n^L(s) \right], \quad (14)$$

где

$$G_{ni}(\xi) = R_{ni}(-\xi) e^\xi - R_{ni}(\xi) e^{-\xi}, \quad (i=1; 2),$$

$$E_{n1}(\xi) = Q_{n1}(-\xi) e^\xi - Q_{n1}(\xi) e^{-\xi},$$

$$Q_{n1}(\xi) = R_{n2}(\xi) - 2\chi_1 R_{n1}(\xi), \quad \xi = r \gamma_1 s,$$

$$R_{n0}(s) = \sum_{o=0}^n \alpha_{n,o} s^{n-o}, \quad \alpha_{n,o} = (n+o)! / (n-o)! 2^o,$$

$$\alpha_{n,o} = 0, \quad o < 0, \quad o > n,$$

$$R_{n1}(s) = \sum_{o=0}^{n+1} \beta_{n,o} s^{n+1-o}, \quad \beta_{n,o} = \alpha_{n,o} + o \alpha_{n,o-1},$$

$$R_{n2}(s) = \sum_{o=0}^{n+2} \varepsilon_{n,o} s^{n+2-o}, \quad \varepsilon_{n,o} = \beta_{n,o} + o \beta_{n,o-1}.$$

Далее, удовлетворяя граничному условию (9) выражением (14), приходим бесконечной системе алгебраических уравнений относительно неизвестных функций $A_n^L(s)$ и $B_n^L(s)$, которую запишем в форме матричного уравнения

$$\mathbf{L} \mathbf{A} y^2 + \mathbf{G}_1 \mathbf{B} - \mathbf{G}_2 \mathbf{B} y^2 = \mathbf{p} y, \quad y = e^{-\gamma_1 s}, \quad (15)$$

$$\mathbf{A}(s) = \|A_0^L(s), A_1^L(s), \dots\|^T,$$

$$\mathbf{B}(s) = \|B_0^L(s), B_1^L(s), \dots\|^T.$$

Здесь $\mathbf{L}$, $\mathbf{G}_\kappa$ – диагональные матрицы соответственно бесконечных элементов $L_n(s)$, $G_{\kappa n}(s)$ ($\kappa=1,2$); $\mathbf{p}$ – бесконечный вектор – столбец с компонентами $p_n(s)$ и они имеют следующие виды:

$$L_n(s) = Q_{n1}(r_1 \gamma_1 s), \quad G_{1n}(s) = (-1)^n L_n(-s)$$

$$G_{2n}(s) = (-1)^n L_n(s),$$

$$p_n(s) = r_1^3 (r_1 \gamma_1 s)^n p_{1n}^L(s) / \beta_1$$

С учёт условия (11), в пространстве изображения общее решение уравнения (8) при $\kappa = 0$ разыскивается в виде:

$$\Phi_{0n}^L(r, s) = r^{-1}(\zeta)^{-n} R_{n0}(\zeta) C_n^L(s) e^{-\zeta}, \quad \zeta = r \gamma_0 s. \quad (16)$$

где $C_n^L(s)$ - неизвестные функции параметра s .

Используя соотношения (7) с изображением общего решения (16), находим выражения для компонент w_{0n}^L вектора смещений и $\sigma_{rm}^{(0)L}$ тензора напряжений

$$w_{0n}^L(r, s) = -r^{-2} \zeta^{-n} R_{n1}(\zeta) C_n^L(s) e^{-\zeta}, \quad \zeta = r \gamma_0 s, \quad (17)$$

$$\sigma_{rm}^{(0)L}(r, s) = r^{-3} \zeta^{-n} \beta_0 Q_{n1}(\zeta) C_n^L(s) e^{-\zeta}. \quad (18)$$

Теперь, подставляя выражения (13), (14), (17) и (18) в условия контакта (10), исключив неизвестную функцию $C_n^L(s)$ из полученных выражений, получаем выражения

$$w_{0n}^L(r, s) = -\frac{R_{n1}(\zeta) e^{-\zeta} e^z}{r^2 \xi^n R_{n1}(z)} \left[R_{n1}(t) A_n^L(s) + (-1)^n G_{n1}(t) B_n^L(s) \right], \quad (19)$$

$$\sigma_{rm}^{(0)L}(r, s) = \frac{\beta_0 Q_{n1}(\zeta) e^{-\zeta} e^z}{r^3 \xi^n r_2^2 Q_{n1}(z)} \left[Q_{n1}(t) A_n^L(s) + (-1)^n E_{n1}(t) B_n^L(s) \right], \quad (20)$$

$$z = r_2 \gamma_0 s, \quad t = r_2 \gamma_1 s, \quad \zeta = r \gamma_0 s,$$

для коэффициентов ряда характеристик напряженно-деформированного состояния окружающей среды относительно неизвестных функций $A_n^L(s)$, $B_n^L(s)$, и вторую бесконечную систему алгебраических уравнений, и записываем ее в виде матричного уравнения:

$$\mathbf{N} \mathbf{A} \mathbf{x}^2 + \mathbf{T}_1 \mathbf{B} - \mathbf{T}_2 \mathbf{B} \mathbf{x}^2 = 0, \quad \mathbf{x} = e^{-r_2 \gamma_1 s}, \quad (21)$$

где $\mathbf{N}$, $\mathbf{T}_\kappa$ - диагональные матрицы соответственно бесконечных элементов $N_n(s)$, $T_{\kappa n}(s)$ ($\kappa = 1, 2$) и они определяются следующими выражениями:

$$N_n(z, t) = \beta_1 Q_{n1}(t) R_{n1}(z) - \beta_0 Q_{n1}(z) R_{n1}(t),$$

$$T_{1n}(s) = (-1)^n N_n(z, -t), \quad T_{2n}(s) = (-1)^n N_n(z, t).$$

Следует подчеркнуть, что элементы всех приведенных выше матриц и векторов являются рациональными функциями параметра s , что позволяет определить оригиналы искомых функций с помощью теории вычетов [17].

Таким образом, начально-краевая задача (1)-(5) сводится к решению системы, состоящей из двух матричных уравнений (15) и (21).

$$\begin{cases} \mathbf{L} \mathbf{A} \mathbf{y}^2 + \mathbf{G}_1 \mathbf{B} - \mathbf{G}_2 \mathbf{B} \mathbf{y}^2 = \mathbf{p} \mathbf{y}, \\ \mathbf{N} \mathbf{A} \mathbf{x}^2 + \mathbf{T}_1 \mathbf{B} - \mathbf{T}_2 \mathbf{B} \mathbf{x}^2 = 0 \end{cases} \quad (22)$$

Решение системы (22) ищется в виде бесконечных рядов по экспонентам

$$\mathbf{A} = \sum_{l,i=0}^{\infty} \mathbf{a}_{l,i}(s) x^l y^{-i-1}, \quad \mathbf{B} = \sum_{l,i=0}^{\infty} \mathbf{b}_{l,i}(s) x^l y^{-i-1}, \quad (23)$$

$$\mathbf{a}_{l,i}(s) = (a_{l,i}^{(0)}(s), a_{l,i}^{(1)}(s), a_{l,i}^{(2)}(s), \dots),$$

$$\mathbf{b}_{l,i}(s) = (b_{l,i}^{(0)}(s), b_{l,i}^{(1)}(s), b_{l,i}^{(2)}(s), \dots).$$

Далее, подставляя бесконечные ряды (23) в систему (22) и приравнявая коэффициенты в левой и правой частях при одинаковых степенях переменных x и y , получим следующие рекуррентные соотношения для коэффициентов $\mathbf{a}_{l,i}(s)$, $\mathbf{b}_{l,i}(s)$ и начальные условия к ним:

$$\mathbf{a}_{l,i}(s) = \mathbf{U}_2 \mathbf{b}_{l,i}(s) - \mathbf{U}_1 \mathbf{b}_{l,i-2}(s), \quad l \geq 0, \quad i \geq 2;$$

$$\mathbf{b}_{l,i}(s) = \mathbf{J} \mathbf{b}_{l-2,i}(s) - \mathbf{S} \mathbf{a}_{l-2,i}(s), \quad l \geq 2, \quad i \geq 0;$$

$$\mathbf{a}_{l,0}(s) = \mathbf{U}_2 \mathbf{b}_{l,0}(s), \quad l \geq 1; \quad \mathbf{a}_{l,1}(s) = \mathbf{U}_2 \mathbf{b}_{l,1}(s), \quad l \geq 0;$$

$$\mathbf{a}_{0,i}(s) = 0, \quad i \geq 1; \quad \mathbf{a}_{l,i}(s) = 0, \quad i \geq 0;$$

$$\mathbf{b}_{0,i}(s) = 0, \quad \mathbf{b}_{l,i}(s) = 0, \quad i \geq 0;$$

$$\mathbf{a}_{0,0}^{(n)}(s) = \frac{p_n(s)}{L_n(s)}, \quad n \geq 0; \quad \mathbf{U}_k = \left\| \frac{G_{kn}(s)}{L_n(s)} \delta_{nm} \right\|,$$

$$\mathbf{J} = \left\| \frac{T_{2n}(s)}{T_{1n}(s)} \delta_{nm} \right\|, \quad \mathbf{S} = \left\| \frac{N_n(s)}{T_{1n}(s)} \delta_{nm} \right\|,$$

где δ_{nm} - знак Кронекера ($n, m = 0, 1, 2, \dots$).

Эти рекуррентные соотношения позволяют определить коэффициенты ряда и искомые функции в виде рациональных функций параметра преобразований Лапласа и использовать теорию вычетов при переходе от их изображений к оригиналам [17].

Получены формулы для компонент тензора напряжений и вектора смещения в пространстве изображений.

$$w_{1n}^L(r, s) = -r^{-n-2} (\gamma_1 s)^{-n} D_{n1}(r \gamma_1 s),$$

$$\sigma_{rm}^{(1)L}(r, s) = r^{-n-3} (\gamma_1 s)^{-n} \beta_1 W_{n1}(r \gamma_1 s),$$

$$w_{0n}^L(r, s) = -\frac{R_{n1}(\zeta) e^{-\zeta} e^z}{r^2 \xi^n R_{n1}(z)} D_{n1}(r_2 \gamma_1 s),$$

$$\sigma_{rm}^{(0)L}(r, s) = \frac{\beta_0 Q_{n1}(\zeta) e^{-\zeta} e^z}{r^3 \xi^n r_2^2 Q_{n1}(z)} W_{n1}(r_2 \gamma_1 s),$$

$$D_{n1}(\xi) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \left[R_{n1}(\xi) a_{ij}^{(n)}(s) e^{-\xi} + (-1)^n G_{n1}(\xi) b_{ij}^{(n)}(s) \right] x^i y^{-j-1},$$

$$W_{n1}(\xi) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \left[Q_{n1}(\xi) a_{ij}^{(n)}(s) e^{-\xi} + \right.$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 РИНЦ (Russia) = 0.191
 ESJI (KZ) = 8.100
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

$$+(-1)^n E_{nl}(\xi) b_{ij}^{(n)}(s) \Big] x^i y^{-j-1}.$$

4. Численные результаты и сравнения.

Результаты численного эксперимента получены для процесса нестационарного распространения продольной волны от толстостенной сферической стальной оболочки ($E_1 = 20.1 \cdot 10^{10}$ Pa, $\nu_1 = 0.3$, $\rho_1 = 7.8 \cdot 10^3$ kg / m³) с внутренним и внешним радиусами $r_1 = 1.0$, $r_2 = 2.5$ соответственно, в бесконечном гранитном ($E_0 = 5 \cdot 10^{10}$ Pa, $\nu_0 = 0.15$, $\rho_0 = 3 \cdot 10^3$ kg / m³) пространстве. В этом случае безразмерные параметры определяются значениями $\gamma_0 = 0.71$, $\gamma_1 = 1.0$, $\chi_0 = 0.1765$, $\chi_1 = 0.43$, $\beta_0 = 0.195$, $\beta_1 = 1.0$. Закон изменения заданной нагрузки во времени, действующей на внутреннюю поверхность сферической оболочки,

выбирается в виде различных функций $p_1(\tau, \vartheta) = p_0 H(\tau)$, $p_1(\tau, \vartheta) = p_0 \tau e^{-\tau} H(\tau)$ и $p_1(\tau, \vartheta) = p_0 \tau^2 e^{-\tau} H(\tau)$, где $p_0 = 1$, $H(\tau)$ - единичная функция Хевисайда. Вычисления включали суммирование восьмичленных рядов по ортогональным полиномам Лежандра $P_n(\cos \theta)$.

Графики на всех рисунках демонстрируют изменения компонент напряженно-деформированного состояния оболочки в точках $r = 1.2$ (кривая 1), $r = 1.5$ (кривая 2) и $r = 1.8$ (кривая 3), когда $\vartheta = \pi/4$. Графики на рисунках 2, 5 и 6 построены при заданной нагрузке $p_1(\tau, \vartheta) = p_0 H(\tau)$, графики на рисунке 3 - когда $p_1(\tau, \vartheta) = p_0 \tau e^{-\tau} H(\tau)$, а графики на рисунке 4 получены при заданной нагрузке $p_1(\tau, \vartheta) = p_0 \tau^2 e^{-\tau} H(\tau)$.

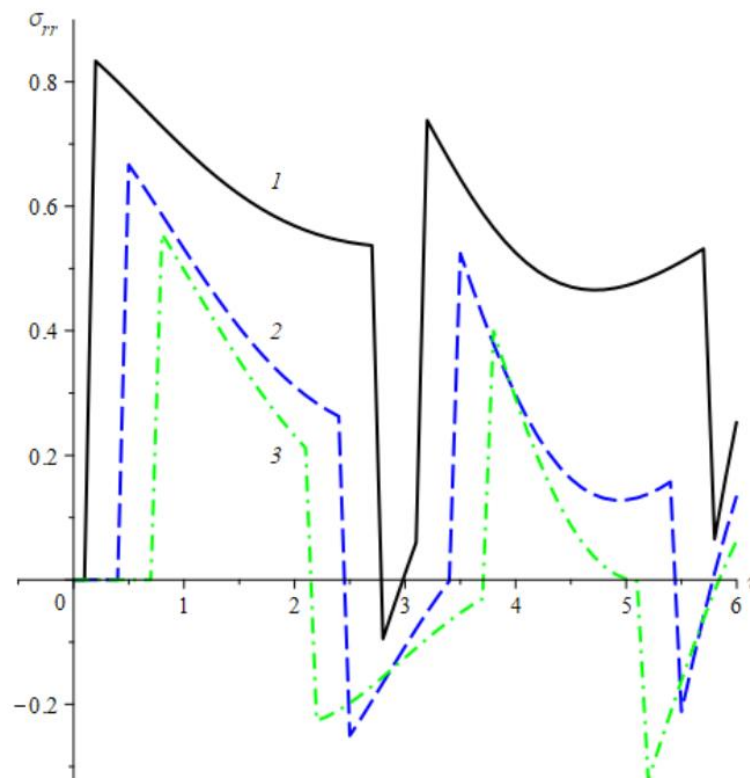


Рисунок 2. Изменение радиального напряжения $\sigma_{rr}^{(1)}$ по времени, когда $p_1(\tau, \vartheta) = p_0 H(\tau)$.

Impact Factor:

ISRA (India)	= 6.317	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
ISI (Dubai, UAE)	= 1.582	ПИИЦ (Russia)	= 0.191	PIF (India)	= 1.940
GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.100	IBI (India)	= 4.260
JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 7.184	OAJI (USA)	= 0.350

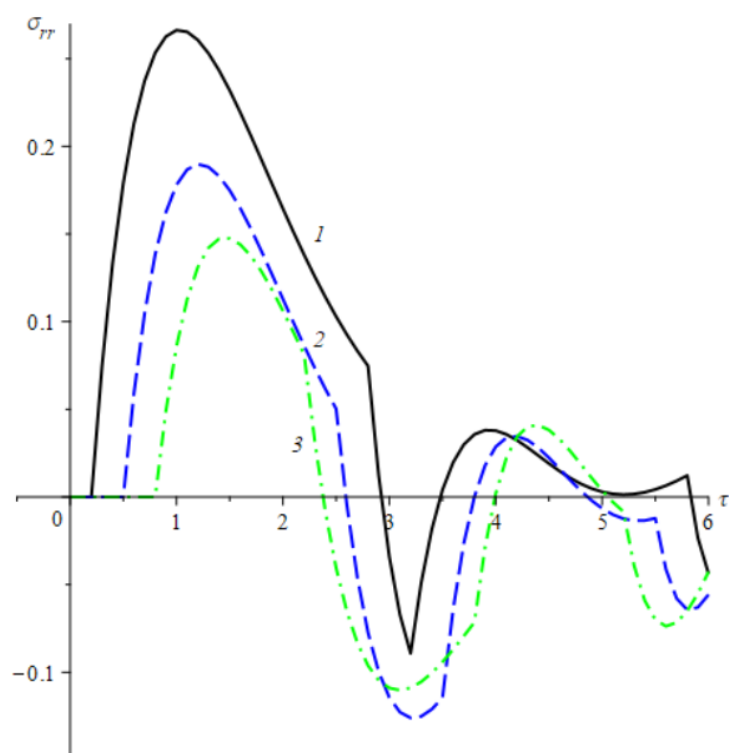


Рисунок 3. Изменение радиального напряжения $\sigma_{rr}^{(1)}$ по времени, когда $p_1(\tau, \vartheta) = p_0 \tau e^{-\tau} H(\tau)$.

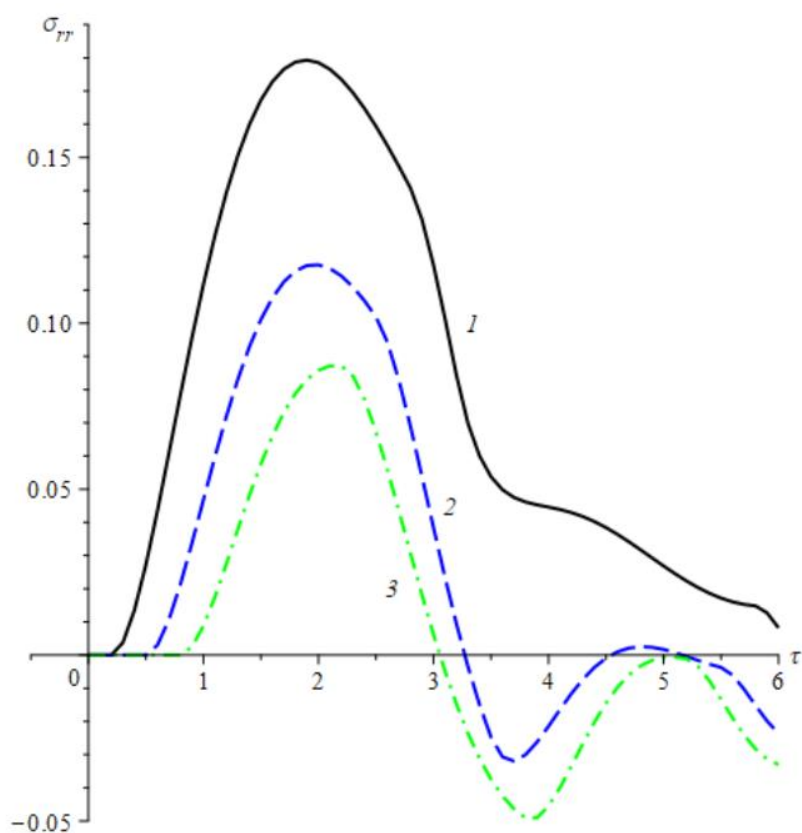


Рисунок 4. Изменение радиального напряжения $\sigma_{rr}^{(1)}$ по времени, когда $p_1(\tau, \vartheta) = p_0 \tau^2 e^{-\tau} H(\tau)$.

Impact Factor:

ISRA (India)	= 6.317	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
ISI (Dubai, UAE)	= 1.582	РИИЦ (Russia)	= 0.191	PIF (India)	= 1.940
GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.100	IBI (India)	= 4.260
JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 7.184	OAJI (USA)	= 0.350

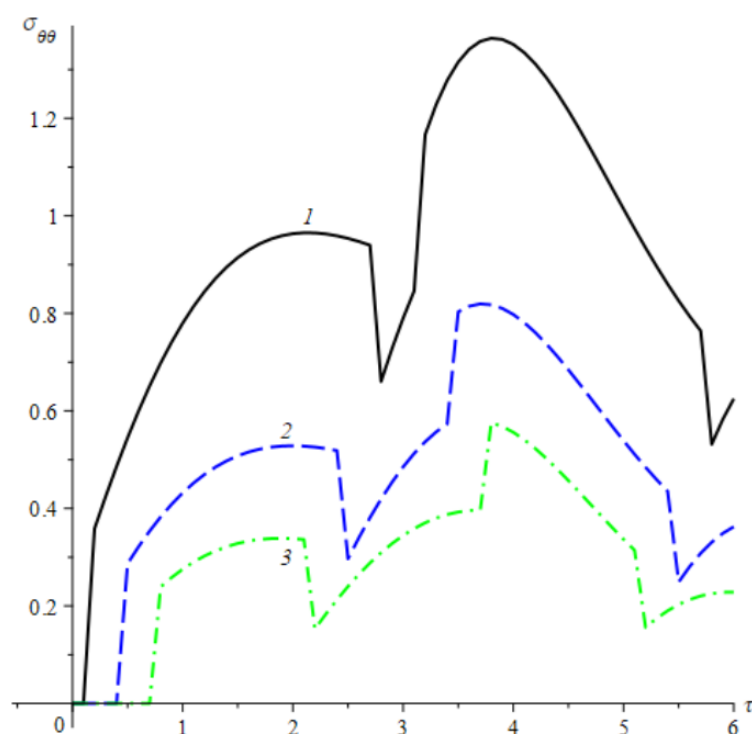


Рисунок 5. Изменение радиального напряжения $\sigma_{99}^{(1)}$ по времени, когда $p_1(\tau, \vartheta) = p_0 H(\tau)$.

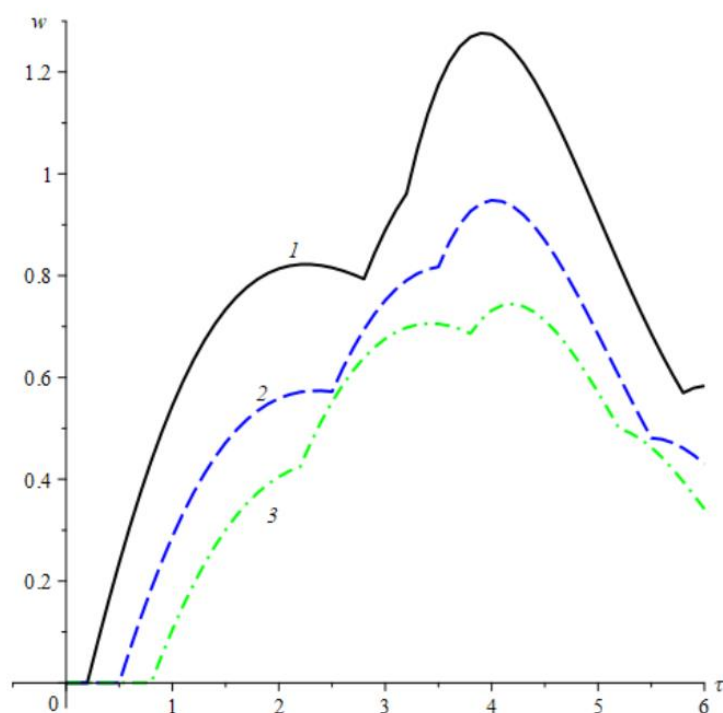


Рисунок 6. Изменение радиального напряжения w_1 по времени, когда $p_1(\tau, \vartheta) = p_0 H(\tau)$.

Графики показывают, что с приходом волны появляется скачок. С увеличением r высота скачки уменьшается. Графики демонстрируют

влияние волн, отраженных от граничных поверхностей, на напряженно-деформированное состояние оболочки и окружающей среды. Из

Impact Factor:	ISRA (India)	= 6.317	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
	ISI (Dubai, UAE)	= 1.582	РИИЦ (Russia)	= 0.191	PIF (India)	= 1.940
	GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.100	IBI (India)	= 4.260
	JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 7.184	OAJI (USA)	= 0.350

графиков видно, что напряжения и перемещения равны нулю до прихода первой упругой волны.

5. Заключение.

Разработан алгоритм решения задачи о нестационарных колебаниях толстостенной сферической оболочки, расположенной в бесконечном однородном изотропном пространстве. Получены точные выражения для

компонент вектора перемещения и тензора напряжений. Графики изменения по времени компонент вектора перемещения и тензора напряжений оболочки и окружающей среды показывают, что волны, отраженные от граничных поверхностей, оказывают влияние на напряженно-деформируемое состояние окружающей среды и оболочки.

References:

1. Abuziarov, M. H., Glazova, E. G., Kochetkov, A. V., & Krylov, S. V. (2023). On New Method and 3D Codes for Shock Wave Simulation in Fluids and Solids in Euler Variables based on a Modified Godunov Scheme, *WSEAS TRANSACTIONS on FLUID MECHANICS*, Vol. 13, pp. 173 - 192. DOI: 10.37394/232013.2023.18.17
2. Bahari, A., Lefeuvre-Mesgouez, G., Mesgouez, A., & Popplewell, N. (2016). "Transient Response of a Fluid-Filled, Thick-Walled Spherical Shell Embedded in an Elastic Medium," *E3S Web of Conferences*, 12, 06004. <http://doi.org/10.1051/E3SCONF/20161206004>
3. Schwartz B.L., Liu, Y., Royston, Th.J., & Magin, R.L. (2016). "Axisymmetric diffraction of a cylindrical transverse wave by a viscoelastic spherical inclusion," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 364, 3, March 2016, pp. 222-233. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.11.023>
4. Georgievskii, D.V., & Israilov, M.Sh. (2015). "Seismodynamics of Extended Underground Structures and Soils: Statement of the Problem and Self-Similar Solutions," *Mechanics of Solids*, Vol. 50, No.4, pp. 473-484. <http://doi.org/10.3103/S0025654415040135>
5. Gorshkov, A.G., Tarlakovskii, D.V., & Shukurov, A.M. (2004). "Propagation of unsteady shear waves from a spherical inclusion in an elastic half-space," *Mechanics of Solids*. 39 (6), pp. 47-52.
6. Israilov, M.Sh. (2022). "Action of an Oblique Seismic Wave on an Underground Pipeline," *Mechanics of Solids*. 57 (5), pp. 1006-1015. DOI 10.3103/S0025654422050089
7. Jurayev, G.U., & Musurmonova, M.O. (2022). "An algorithm for solving the problem of expansion of a spherical cavity supported by a thin spherical shell in an elastic-porous fluid-saturated medium," *AIP Conference Proceedings*, Vol. 2432, #1, p. 030109. <https://doi.org/10.1063/5.0089549>
8. Kirillova, I.V. (2024). "Elliptic Boundary Layer in Shells of Revolution under Surface Shock Loading of Normal Type," *Mechanics of Solids*. Vol. 59, No.5, pp. 2686-2693. DOI: 10.1134/S0025654424604397
9. Maslov, L.B. (2018). "Dynamic model of a poroelastic medium with double porosity," *Mechanics of Solids*, Vol. 53, No. 2, pp. 78-90. <http://doi.org/10.3103/S0025654418020097>
10. Saliev, A.A., Tarlakovskii, D.V., & Shukurov, A.M. (2008). "The propagation of non-stationary waves from a spherical cavity in an acoustic layer," *J. Appl. Math. Mech.* 72 (4), pp. 410-416. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2008.08.013>
11. Shukurov, A. (2023). *Propagation of skew-symmetric unsteady shear waves from thick-walled shell in elastic space*, *E3S Web of Conferences*, Vol. 365, 01014, <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202336501014>
12. Shukurov, A., & Musurmonova, M. (2024). *Propagation of skew-symmetric nonstationary waves in an elastic spherical layer*, *AIP Conf. Proc.* 3004, 040009, <https://doi.org/10.1063/5.0199588>
13. Verma, V.K., & Dixit, P.K. (2016). Flow past porous spherical shell with radial variation of permeability, *Special Topics & Reviews in Porous Media: An International Journal*, Vol. 7, No. 3, pp. 299-307. <http://doi.org/10.1615/SpecialTopicsRevPorousMedia.v7.i3.70>
14. Doetsch, G. (1971). *Guide to the practical applications of the Laplace and Z – transforms*, Van Nostrand-Reinhold.
15. Kuznetsov, D.S. (1985). *Special functions*, Moscow, Higher School.
16. (1984). *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, edited by Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. Dover publications, New York.
17. Lavrentiev, M.A., & Shabbat, B.V. (1987). *Methods of the theory of functions of a complex variable*, Moscow, Nauka.